ψ^* 2016 : TD des 30 janvier et 1 février (semaine 18)

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

1. $E = C^0([-1,1])$ est muni de son produit scalaire usuel, F est le sev des fonctions nulles sur $[0,1]$.
   a. Lemme : montrer que si f est positive et g est continue sur $[a,b]$, alors :
   $$\exists c \in [a,b] \ , \ \int_a^b fg = g(c) \int_a^b f$$
   b. Soient $a \in \left]-1,1\right[$ et $f_{a,n}$ la fonction pic centrée en a, nulle hors de $\left]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right[$, et d'intégrale 1.
   Pour $g \in E$ quelconque, calculer $\lim_{n\infty}(f_{a,n} \mid g)$.
   c. Déterminer $F^\perp$.
   d. Montrer que $F \oplus F^\perp \neq E$.

2. $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel : $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
   F est le sev de E engendré par $a : t \mapsto t$ et $b : t \mapsto t^2$.
   a. Calculer la projection orthogonale de $g : t \mapsto \ln(1+t)$ sur F .
   b. Ecrire le code Python qui permettrait de calculer la distance de g à F .

3. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   Justifier l'existence de $m = \min\left\{ \sum_{(i,j)\in[1..n]^2} (a_{i,j} - x_{i,j})^2 \mid X \in S_n(\mathbb{R}) \right\}$, et le calculer.

4. I est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a est un réel.
   a. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \exists A_n \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ P'(a) = \int_I A_n(t)P(t)dt$$
   b. Montrer qu'il n'existe aucun $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}[X] \ , \ P'(a) = \int_I A_n(t)P(t)dt$$
   c. Généraliser avec $P''(a)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice de Hilbert :
   $$H_n = \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{(i,j)\in[1..n]^2}$$
   est inversible. Indication : l'interpréter comme une matrice de Gram.

6. Soient E un espace euclidien, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram**.**
   a. On prend x, y des vecteurs quelconques de E, et X, Y leur matrice colonne dans B .
   Exprimer $(x \mid y)$ à l'aide de X, Y, G .
   b. En déduire que G est inversible.
   c. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de G sont strictement positives.
   d. Montrer que toutes les valeurs propres de G sont réelles.
   Indication : pour X vecteur propre de G, calculer et comparer $\overline{X}^T G X$ et $X^T G \overline{X}$.