ψ^* 2016 : TD des 12 et 14 décembre (semaine 13)

Séries entières

1. $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ avec $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, x complexe.
   Rayon de convergence, domaine de définition, expression.

2. $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)\, x^n$ avec x complexe et $\theta \in \left]0, \pi\right[$ fixé.
   Rayon de convergence, domaine de définition, expression.

3. $G : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\theta}{n}\, x^n$ avec x réel et $\theta \in \left]0, \pi\right[$ fixé.
   Rayon de convergence, expression pour $x \in \left]-1, 1\right[$.

4. Existence, rayon coefficients du DSE de $\arcsin$.

5. Domaine de définition et expression explicite sur $\left]-R, R\right[$ des fonctions de variable réelle :
   a. $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^{2n+1}$
   b. $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^n$
   c. $H : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^n$

6. $F : x \mapsto e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$ avec x réel.
   a. Montrer que F est développable en série entière, sur un intervalle à préciser.
   b. Montrer que F est solution d'une EDL1, et en déduire les coefficients de son DSE.
   c. Trouver une expression explicite de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.