ψ* 2016 : TD des 14 et 16 novembre (semaine 9)

Déterminants

1. Calculer le déterminant de la matrice de taille n suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

2. Déterminant circulant.
   Soient $b_0, ..., b_{n-1}$ des scalaires, et A la matrice carrée de taille n définie par :
   $\forall (i,j) \in [1..n]^2 \, , \; a_{i,j} = b_r$ où r est le reste de la division de $j - i$ par n

   a. Ecrire la matrice A .

   b. On fixe ω une racine $n^{\text{è}}$ de 1, et on pose $X = [1, \omega, ..., \omega^{n-1}]^T$.
   Calculer AX et vérifier qu'il est proportionnel à X (X est ainsi un **vecteur propre** de A) .

   c. On pose $\omega_j = \exp\left(i\frac{j2\pi}{n}\right)$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$; calculer AB .

   d. En déduire $\det A$.

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$

   a. Calculer $\det(\lambda I - A)$, où λ est un scalaire. Indication : bien que ce ne soit pas naturel, le plus direct est de développer par rapport à la dernière colonne.

   b. Dans le cas où tous les a_i valent -1 : calculer les **valeurs propres** de A, c'est à dire les scalaires λ pour lesquels $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$ avec $a_1, ..., a_{n-1}$ réels non tous nuls, $n \geq 3$.

   a. Calculer A^2, puis vérifier qu'aucun polynôme de degré 2 n'est annulateur de A .

   b. Trouver α, β tels que $A^2 - \alpha A - \beta I$ soit la plus creuse possible, puis calculer $A\,(A^2 - \alpha A - \beta I)$. Donner un polynôme annulateur de A de degré minimal.

   c. Calculer $\chi_A = \det(XI - A)$ (bien que X soit un polynôme, on le considèrera comme un réel pour faire le calcul).

   d. Vérifier que χ_A est un polynôme annulateur de A (théorème de Cayley-Hamilton).