ψ^* 2016 : TD des 7 et 9 novembre (semaine 8)

Algèbre linéaire élémentaire

1. Archi-classique : E est un ev de dimension *finie*, u un endomorphisme de E .
   a. Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que :
      i. $\forall k \in [0..p-1]\ ,\ \ker(u^k) \subsetneq \ker(u^{k+1})$
      ii. $\forall k \geq p\ ,\ \ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$
      Indication : considérer la suite des $d_k = \dim\ker(u^k)$.
   b. Montrer qu'alors :
      i. $\forall k \in [0..p-1]\ ,\ \mathrm{Im}(u^k) \supsetneq \mathrm{Im}(u^{k+1})$
      ii. $\forall k \geq p\ ,\ \mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^{k+1})$
   c. Montrer que $\ker(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p) = E$.

2. Soient E un ev de dimension finie, u un endomorphisme de E .
   Montrer que $\dim(\ker u^k) \leq k \dim(\ker u)$.
   Indication : utiliser la restriction de u à $\ker u^k$.

3. Interpolation de Lagrange. Soient $a_1, ..., a_n$ des scalaires *distincts.*
   a. Montrer que :
   $$\Phi : P \mapsto \begin{bmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{bmatrix}$$
   est un isomorphisme d'ev de $\Bbbk_{n-1}[X]$ sur $\Bbbk^n$.
   b. Montrer que pour tout choix de $(b_1, ..., b_n) \in \Bbbk^n$, il existe exactement un $P \in \Bbbk_{n-1}[X]$ vérifiant :
   $$\forall i \in [1..n]\ ,\ P(a_i) = b_i$$
   c. On définit $B = (L_k)_{k\in[1..n]}$ par :
   $$L_k = \prod_{i\in[1..n]\setminus\{k\}} \left(\frac{X-a_i}{a_k-a_i}\right)$$
   Montrer que B est une base de $\Bbbk_{n-1}[X]$.
   d. Pour tout $P \in \Bbbk_{n-1}[X]$, donner sa décomposition dans B.

4. Calculer le rang de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i,j) \in [1..n]^2\ ,\ a_{i,j} = \delta_{|j-i|,1}$.

5. Soit $A \in M_n(\Bbbk)$.
   a. En considérant la famille $\left(A^k\right)_{k\in[0..n^2]}$, montrer qu'il existe un polynôme non nul P tel que $P(A) = 0_{M_n(\Bbbk)}$.
   b. En considérant $D = \{\ \deg P \mid P \in \Bbbk[X]\setminus\{0\}\ \text{ et }\ P(A) = 0\ \}$, montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de A et de degré minimal.
   c. Montrer que si on lui impose de plus d'avoir pour coefficient diminant 1, alors ce polynôme annulateur minimal est unique.
   d. Montrer que si λ est racine de Q, alors $A - \lambda I$ est non inversible.
   e. Montrer que la réciproque est vraie, en utilisant un élément du noyau de $A - \lambda I$.