ψ^* 2016 : TD des 26 et 28 septembre (semaine 4)

Suites vectorielles

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $|||A||| < 1$, et $U : p \mapsto \sum_{k=0}^{p} A^k$.
   a. Montrer que :
   $$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\|_\infty \leq |||A|||\,.\,\|X\|_\infty$$
   b. En déduire que $I - A$ est inversible.
   c. Montrer que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ (I-A)^{-1} - U_p = (I-A)^{-1} A^{p+1}$$
   d. Montrer que U converge, et préciser sa limite.

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $U : n \mapsto A^n$.
   a. Trouver la CNS sur (a,b) pour que U converge ; préciser alors la limite.
   b. Dans le cas $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, représenter graphiquement l'ensemble des couples pour lesquels il y a convergence.

Topologie

1. Prouver que l'adhérence de $B(a,r)$ est $B_f(a,r)$.

2. Dans $E = M_n(\mathbb{R})$, on considère les parties P (resp. Q) constituée des matrices à coefficients tous strictement positifs (resp. positifs ou nuls).
   a. Montrer que P est ouvert.
   b. Montrer que Q est fermé.
   c. Quelle est l'adhérence de P ?

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. On suppose que f une **application**, ie est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   Le **graphe** de f est $G = \{\ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$.
   a. Montrer que si toutes les fonctions coordonnées de f sont continues, alors son graphe est fermé.
   b. Montrer par un contre exemple (avec $n = 1$ pour simplifier) que la réciproque est fausse.