ψ^* 2017 : TD des 13 et 15 septembre (semaine 2)

Séries numériques

1. On fixe un complexe z et on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   a. Que vaut $\lim_{n\infty} a_n$?
   b. Quelle est, en fonction de z, la nature de $\sum a_n z^n$?
   c. Pour $|z| < 1$, trouver l'expression explicite de $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
   Indication : utiliser un produit de Cauchy.

2. Nature de $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

3. On pose $u_n = (-1)^{n-1} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
   a. Etudier la convergence de $\sum u_n$.
   b. Pour quels n est-on sûr que U_n soit une approximation de $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à 10^{-3} près ?
   c. Calculer U_{2p} et le mettre sous forme $\ln(V_p)$, où V_p s'exprime à l'aide de factorielles.
   d. En utilisant la formule de Stirling, en déduire la valeur exacte de S.

4. Règle d'Abel.
   On suppose que :
   i. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n b_n$
   ii. a décroit vers 0
   iii. $B = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   a. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction des a_k et B_k (intégration par parties discrète).
   b. En déduire que $\sum u_n$ converge.

5. Soit $u : n \mapsto n^{-\alpha} \cos n\theta$ où $\theta \in]0, \pi[$, $\alpha > 0$.

   a. Nature de $\sum u_n$ (utiliser la règle d'Abel).
   b. Nature de $\sum |u_n|$ (utiliser, après l'avoir justifié, $|\cos x| \geq \cos^2 x$).