PSI* 2016 – 2017
TD N°9 – DIFFUSION THERMIQUE

EXERCICE 1 - Résolution de problème : Un mammifère terrestre

Le plus petit mammifère terrestre vivant en milieu tempéré est la *musaraigne étrusque.*

Sarcophage de musaraigne étrusque
Egypte 26ème Dynastie – 650 avant JC

Musaraigne étrusque

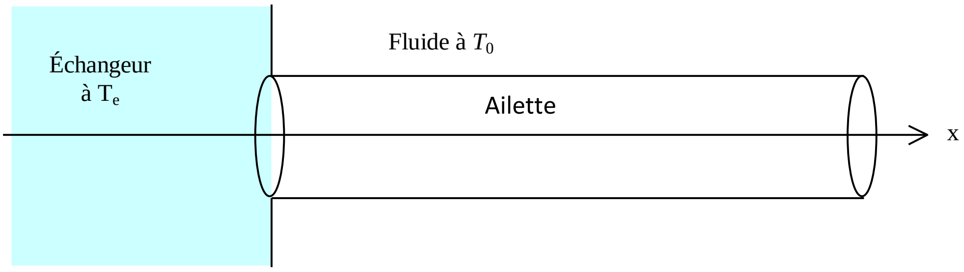
Sa température corporelle intérieure est T_i = 37 °C.
Sa masse vaut environ deux grammes.

L'animal possède une fourrure de masse négligeable d'épaisseur e = 1 mm, de conductivité thermique λ = 0.01 W/m/K.

Donner une estimation de la puissance thermique dégagée par l'animal.

EXERCICE 2 : Ailette de refroidissement

Une tige pleine, cylindrique, d'axe *Ox*, de longueur « infinie », de section droite de rayon *a*, est en contact par une de ses extrémités avec un échangeur à la température T_e et par sa surface latérale avec un fluide à la température constante T_0. Elle joue le rôle d'ailette de refroidissement.



A l'intérieur de la tige :
- on supposera le gradient radial de température suffisamment faible pour que dans la section droite d'abscisse *x* la température $T(x,t)$ soit uniforme ;
- on posera $T_d(x,t) = T(x,t) - T_0$;
- on notera $\Phi(x,t)$ le flux thermique à travers la section droite d'abscisse *x* ;
- on notera *h* le coefficient correspondant au transfert conducto-convectif à travers la surface latérale (loi de Newton) ;
- on appellera μ la masse volumique de la tige, *c* sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique.

L'échangeur réalise une excitation thermique sinusoïdale de l'extrémité de la tige selon la loi

$T_e = T_0 + (T_1 - T_0)\cos\omega t$.

1) Établir les équations en $\Phi(x,t)$ et $T_d(x,t)$ résultant de l'application de la loi de Fourier et du bilan énergétique de l'élément de tige compris entre x et $x + dx$.

2) Donner l'expression des deux équations précédentes en notation complexe. On posera $\underline{T}_d(x,t) = \underline{T}_d(x)\exp(i\omega t)$ et $\underline{\Phi}(x,t) = \underline{\Phi}(x)\exp(i\omega t)$.

3) Établir l'équation différentielle en $\underline{T}_d(x)$.

4) Vérifier que $\underline{T}_d(x) = \underline{T}_d(0)\exp\left(-\left(k_1 + ik_2\right)x\right)$ est solution à condition que les constantes k_1 et k_2 soient solutions d'une équation du type :
$\left(k_1 + ik_2\right)^2 - \left(2\alpha^2 + 2i\beta\right) = 0$, où α et β sont deux constantes.
Donner l'interprétation physique de la solution obtenue :
$T_d(x,t) = \left(T_1 - T_0\right)\mathrm{e}^{-k_1 x}\cos\left(\omega t - k_2 x\right)$

EXERCICE 3 : Le stockage de déchets (Centrale PSI - Extrait)

Les parties suivantes étudient de manière extrêmement simplifiée la possibilité d'un stockage géologique de ces déchets, sous une couche argileuse d'épaisseur $l = 50\ \mathrm{m}$ (Figure 3). Les vecteurs seront notés en gras.

II.A - Aspect thermique

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont très exothermiques. Le champ de température $T(x,t)$ est supposé unidimensionnel, dans un cylindre d'argile (masse volumique ρ_a, conductivité thermique K_a, capacité calorifique massique c_a, diffusivité thermique D_T) de section S. L'énergie thermique s'évacue suivant la loi de Fourier :

$$\boldsymbol{j}_T(x,t) = -K_a\,\boldsymbol{grad}(T)\,.$$

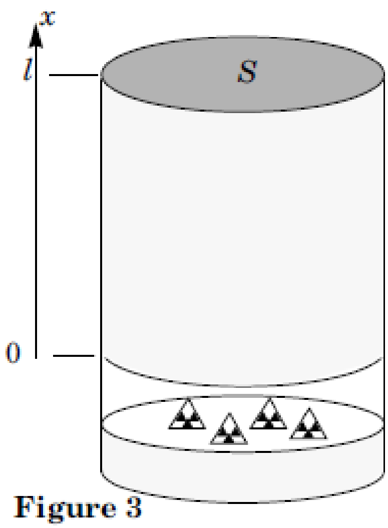


Figure 3

II.A.1) Quel est le nom et l'unité du vecteur $\boldsymbol{j}_T(x,t)$?

II.A.2) Établir l'équation de la chaleur vérifiée par $T(x,t)$.

II.A.3) Relier D_T aux caractéristiques de l'argile.

II.A.4) Interpréter le résultat obtenu lorsqu'on remplace t par $-t$ dans l'équation de la chaleur de la question II.A.2.

Après 30 ans d'entreposage en surface, N colis de déchets C sont uniformément répartis sur la surface S en $(x,t) = (0,0)$. La puissance dégagée par un colis suit approximativement la loi $p(t) = p_0 e^{-t/\tau}$ avec $p_0 = 1\ \mathrm{kW}$ et $\tau = 43$ ans.

II.A.5) Interpréter les conditions aux limites :

$$T(x,0) = T_0\ ;\ T(l,t) = T_0\ ;\ \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = -\frac{Np(t)}{2K_aS}\,.$$

La solution $T(x,t)$ est représentée sur l' annexe 1, au bout de 10, 40 et 100 ans, avec $T_0 = 25°\text{ C}$, dans le cas où la température maximale tolérée est de $100°\text{ C}$.

II.A.6) Compléter le diagramme de l'annexe 1 en identifiant les trois courbes et en justifiant rapidement.

II.A.7) $K_a = 1,5\text{ W}\cdot K^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. À partir de ce diagramme, expliquer comment on peut accéder à la surface nécessaire à l'enfouissement du stock des déchets C français, estimé à $36\,000$ colis. Donner une estimation numérique de cette surface.

II.C - Barrière géologique

On s'intéresse maintenant à une espèce non retenue au voisinage du colis. Cette espèce est alors susceptible de diffuser dans l'argile environnante. La géométrie utilisée est la même que dans la partie II.A (figure 3), et le problème est encore considéré unidimensionnel. On négligera ici la décroissance radioactive des concentrations.

Simultanément à la diffusion, une partie des déchets se fixe dans l'argile (phénomène de sorption). On écrit donc la concentration totale de l'espèce considérée (en $\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$) sous la forme $c_t(x,t) = c(x,t)+c_f(x,t)$, où $c(x,t)$ et $c_f(x,t)$ représentent respectivement la concentration en espèce mobile et la concentration en espèce fixée. Ces deux concentrations sont liées par $c_f(x,t) = K_s c(x,t)$, où K_s est une constante.

Le vecteur densité de courant de particules (en $\text{mol}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$) s'obtient alors par la loi de Fick, à partir de la concentration $c(x,t)$ en espèce mobile $\boldsymbol{j_c}(x,t) = -D\,\boldsymbol{grad}(c)$, où D est le coefficient de diffusion (en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$) de l'espèce mobile.

II.C.1) À l'aide d'un bilan de matière dans une tranche d'argile de section S, comprise entre x et $x+dx$, montrer que $c(x,t)$ vérifie une équation de diffusion :

$$D'\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

où l'on exprimera D' en fonction de D et K_s.

On impose les conditions aux limites :

$$c(0,t) = C_0$$

$$c(l,t) = 0$$

$$c(0<x<l,0) = 0$$

II.C.2) Justifier que la solution $c_0(x)$ de l'équation de la diffusion en régime permanent soit une fonction affine de x. Expliciter complètement cette solution.
On pose $c(x,t) = c_0(x) - c'(x,t)$.

II.C.3) Donner l'équation et les conditions aux limites vérifiées par $c'(x,t)$.
On cherche pour c' une solution de la forme $c'(x,t) = f(x)g(t)$ où $f(x)$ et $g(t)$ sont deux fonctions à déterminer.

II.C.4) Montrer que $g(t)$ est nécessairement de la forme $Ae^{-t/\tau}$, où A et τ sont deux constantes. Justifier $\tau > 0$.

II.C.5) En déduire la forme de $f(x)$. En tenant compte des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = l$, montrer que τ ne peut prendre que les valeurs discrètes $\tau_n = \tau_1/n^2$, où n est un entier non nul, et préciser la valeur de τ_1 en fonction de D' et l.

La fonction $c_0^*(x)$, périodique de période $2l$, impaire, et qui coïncide sur $]0,l[$ avec $c_0(x)$ admet comme développement en série de Fourier :

$$c_0^*(x) = \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right).$$

II.C.6) Vérifier soigneusement que

$$c(x,t) = \left[c_0(x) - \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)\right]$$

est solution de ce problème de diffusion.

II.C.7) Donner l'expression littérale du flux $\phi(l,t)$ à travers la surface S, en $x = l$.

II.C.8) En déduire la quantité de matière $N(t)$ évacuée à la surface entre 0 et t ; on donne :

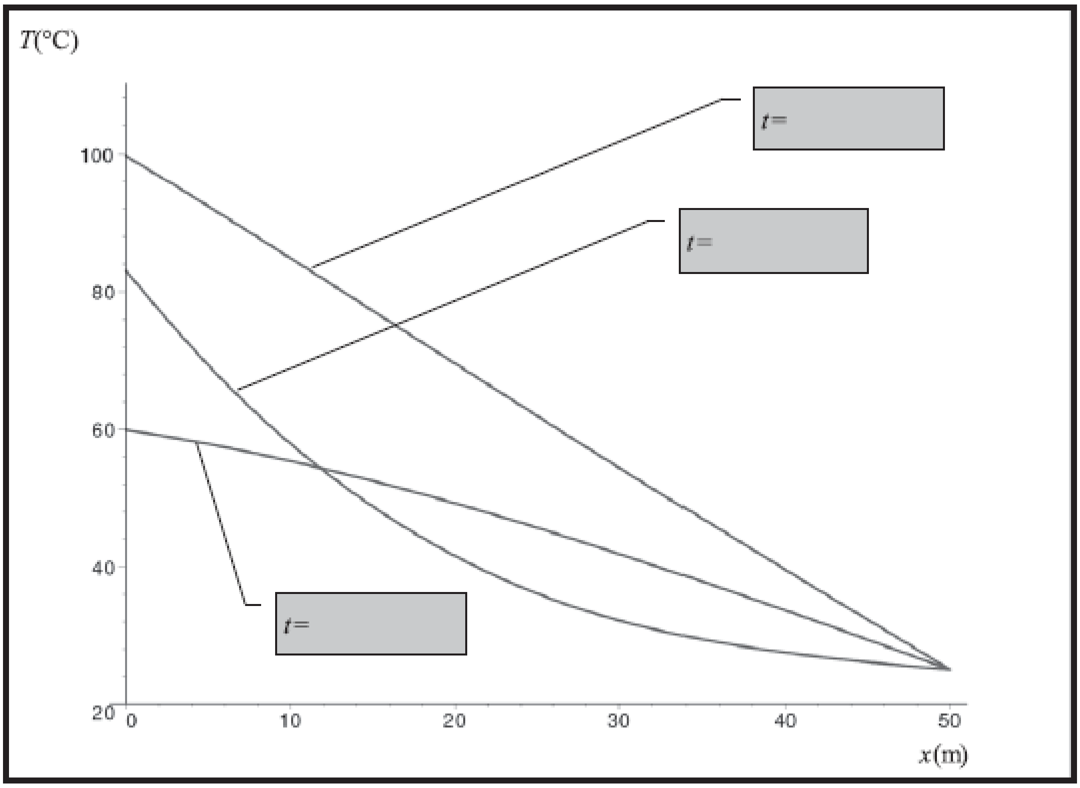
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

II.C.9) Montrer que $N(t)$ admet une asymptote pour $t \gg \tau_1$, dont les paramètres permettent de déterminer les valeurs de D et de D'.
La courbe expérimentale de l'Annexe 3 a été réalisée pour une expérience modèle de diffusion des cations lithium Li^+ dans une argile, avec $C_0 = 10^{-2}\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}$, $S = 30\ \mathrm{cm^2}$ et $l = 0,5\ \mathrm{cm}$.

II.C.10) En déduire graphiquement les valeurs numériques de D et D'. Calculer K_s.

II.C.11) Déterminer l'ordre de grandeur du temps nécessaire au lithium pour atteindre la biosphère, que l'on considérera distante de $50\ \mathrm{m}$. Quel serait ce temps en l'absence de sorption ?

Annexe 1



Annexe 3