PSI* 2021 - 2022 TD N8 - Electromagnétisme (1)

EXERCICE 1: Résistance en géométrie cylindrique

L'espace entre deux cylindres coaxiaux d'axe Oz, de rayons R_1 et R_2 , $(R_1 < R_2)$ est occupé par un conducteur ohmique de conductivité γ .

La hauteur, H, des cylindres est supposée très grande devant R₁ et R₂.

On applique une différence de potentiel constante $V(R_1) - V(R_2)$ entre ces conducteurs et l'on étudie le régime permanent établi.

- Décrire les symétries de la distribution de courant dans l'espace conducteur.
- En déduire la forme du vecteur densité de courant \vec{j} .
- Soit I le courant qui circule entre les cylindres, exprimer le vecteur densité de courant correspondant en fonction notamment de I, r et H.
- Calculer la résistance de ce conducteur entre les deux cylindres en fonction de R₁ et R₂.

On rappelle le lien entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique et la loi d'Ohm locale : $\vec{E} = -\overline{grad}(V)$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

EXERCICE 2 : Supraconducteur – effet Meissner (CCINP PSI extrait)

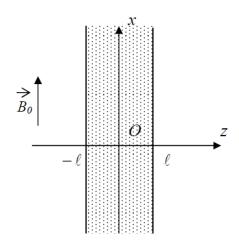
Un matériau supraconducteur est un matériau qui présente une résistivité nulle en dessous d'une certaine température critique : il laisse passer le courant sans aucune résistance ! Ce phénomène n'est pas encore très bien compris à l'heure actuelle malgré quelques théories qui ont fait leurs preuves.

Une théorie ancienne, la théorie de London fondée sur un modèle à deux « fluides », conduit à formuler l'existence d'une densité volumique de courant électrique \vec{j}_L relié au champ magnétique

local \vec{B} selon la relation $\vec{rot}\vec{j}_L = \frac{-1}{\mu_0\Lambda^2}\vec{B}$ où Λ est une constante, appelée constante de London.

B.12 En se servant de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer l'unité de la constante Λ.

On considère une plaque infinie d'épaisseur 2ℓ délimitée par les plans $z=-\ell$ et $z=\ell$. Cette plaque est constituée d'un matériau supraconducteur de constante de London Λ . On applique un champ magnétique extérieur $\overline{B_0} = B_0 \overline{e_x}$ uniforme et constant (**figure 11**). Il apparaît donc un champ magnétique à l'intérieur de la plaque. On se propose de déterminer ce champ. Pour des raisons de symétrie et d'invariance, le champ recherché est de la forme $\overline{B}(M,t) = B(z) \overline{e_x}$.



B.13 Dans le cadre d'un régime ne dépendant pas du temps, établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction B(z).

On rappelle que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{grad}(\text{div}\overrightarrow{B}) - \Delta \overrightarrow{B}$ et on admettra que le champ magnétique est continu en $z = z = \pm \ell$

- **B.15** Résoudre complètement l'équation différentielle. On écrira B(z) sous la forme : $B(z) = D \, ch \left(\frac{z}{\Lambda}\right)$ où ch est la fonction cosinus hyperbolique et D est une constante que l'on exprimera en fonction de B_0 , Λ et ℓ .
- **B.16** Tracer l'allure de B(z) en fonction de z dans le cas où $\Lambda << \ell$. Proposer un commentaire.
- **B.17** Des courants volumiques sont créés dans la plaque selon la relation de London $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{j}_L = -\frac{1}{\mu_0\Lambda^2}\overrightarrow{B}$ vue auparavant. On admettra que le vecteur densité volumique de courant est dirigé selon l'axe (Oy): $\overrightarrow{j}_L = j_L(z)\overrightarrow{e}_y$. Déterminer à partir du résultat de la question **B.15** l'expression de la fonction $j_L(z)$. Tracer l'allure de cette fonction dans le cas où $\Lambda << \ell$. Pourquoi dit-on que la plaque supraconductrice plongée dans un champ magnétique extérieur \overrightarrow{B}_0 est le siège de courants superficiels dus à la supraconductivité ?

B.18 Application

Le niobium est un métal qui devient supraconducteur au dessous d'une température de 23 K. On plonge un petit cylindre de niobium dans un bain d'hélium liquide dont la température d'ébullition est de 4,2 K. Le petit cylindre ainsi refroidi est ensuite placé au dessus d'un aimant permanent qui a été préalablement refroidi. Le petit cylindre lévite au dessus de l'aimant (**figure 12**). A la lumière des questions précédentes, comment faut-il placer l'aimant par rapport au petit cylindre (faire un schéma pour expliquer). On justifiera succinctement qu'il lévite à l'aide de la force de Laplace qui s'applique sur le petit cylindre.

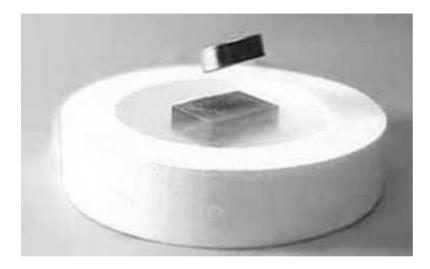


Figure 12 : lévitation d'un petit cylindre de niobium

EXERCICE 3: Conduction dans une fine plaque semi-conductrice (Mines-Ponts extrait)

Les mesures de conductivité jouent un rôle important dans l'étude théorique des milieux semi-conducteurs. Ces mesures sont en général menées sur des échantillons plans dont l'épaisseur constante ε est faible devant les autres longueurs intervenant dans le problème. Le matériau considéré est un conducteur de conductivité γ , comportant des porteurs de charge mobiles de charge q en densité particulaire (nombre de particules par unité de volume) n.

L'étude est menée en régime indépendant du temps ; la loi d'Ohm locale est supposée vérifiée.

Le courant électrique i est amené en un point A du matériau par un fil, perpendiculaire à la plaque, confondu avec l'axe (Az). Ce fil est relié au matériau par une électrode cylindrique de faible rayon. Ce courant électrique repart par un fil de même nature et fixé de la même manière au point D; l'ensemble est représenté sur la figure 1.

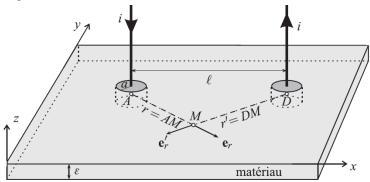


FIG. 1 – Mesure directe de résistance d'une plaque mince conductrice

- □ 1 On considère tout d'abord une situation simplifiée, à symétrie cylindrique, dans laquelle on supprime le contact de départ en D. Le courant arrivant en A se répartit donc dans l'ensemble du matériau avec la symétrie de révolution d'axe (Az): la densité volumique de courant \mathbf{j} en un point M s'y écrit $\mathbf{j}(M) = j(r)\mathbf{e}_r$, où r désigne la distance de M à l'axe (Az) et \mathbf{e}_r le vecteur unitaire radial de cet axe. Exprimer j(r) en fonction de r, ε et i. On considère deux points M_1 et M_2 de la plaque et on note $r_1 = AM_1$ et $r_2 = AM_2$. Déterminer la différence de potentiel $V(M_1) V(M_2)$ en fonction de i, ε , γ et du quotient r_2/r_1 .
- \square 2 On remet en place le contact de départ du courant en D. En procédant par superposition de deux situations analogues à celle de la question 1, déterminer la nouvelle expression de $V(M_1)$ $V(M_2)$ en fonction de i, ε , γ , r_1 , r_2 , $r'_1 = DM_1$ et $r'_2 = DM_2$. Que vaut cette différence de potentiel si M_1 et M_2 sont sur la médiatrice du segment AD? Commenter ce résultat.
- □ 3 On note $\ell = AD$ et a le rayon des électrodes cylindriques de contact électrique en A et D; ces électrodes sont formées d'un matériau métallique très bon conducteur électrique et sont donc considérées comme équipotentielles, de potentiels respectifs V_A et V_D . Montrer que si $\ell/a \gg 1$ la résistance électrique de la plaque s'écrit sous la forme $R \simeq R_0 \ln{(\ell/a)}$, où l'on exprimera R_0 en fonction de γ et ε .
- **□ 4** *Application numérique* : l'épaisseur de la plaque de semi-conducteur est $\varepsilon = 1,0$ mm. On réalise le dispositif de la figure 1 avec $\ell = 2$ cm et a = 0,5 mm. La conductivité du matériau (silicium dopé) est $\gamma = 2,2 \times 10^4 \, \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer *R*, commenter la valeur numérique ; la mesure de *R* est-elle facile ?

Pour limiter les erreurs dans les mesures de tension on utilise la géométrie de van der Pauw qui élimine l'influence du diamètre des électrodes. Sur la figure 2, les électrodes A et D sont utilisées pour l'arrivée et le départ du courant, et les électrodes P et Q pour la mesure de différence de potentiel u = V(P) - V(Q). On définit enfin la résistance parallèle $R_{//} = u/i$.

□ 5 — Déterminer $R_{//}$ en fonction de γ et ε .

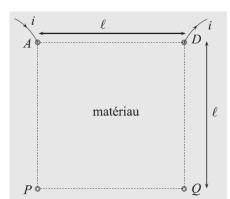


FIG. 2 – Géométrie de van der Pauw : les points A, P, Q et D forment dans cet ordre un carré.