TD N°7 – Pertes de charge

Distribution d'eau (Centrale PSI 2016 - extrait)

I Pertes de charge dans les conduites

Hormis la question I.B.3 sur les pertes singulières, nous considérerons dans toute cette partie des conduites rectilignes à section circulaire constante.

I.A – Fluide en écoulement homogène incompressible laminaire

I.A.1) Que devient la relation de Bernoulli d'un fluide visqueux en régime laminaire stationnaire ?

a) Rappeler les définitions d'un écoulement parfait de fluide, d'un écoulement homogène incompressible, d'un écoulement stationnaire.

b) Dans le cas d'un *fluide parfait* en écoulement homogène incompressible stationnaire, retrouver la relation de Bernoulli à partir du premier principe de la thermodynamique exprimé relativement à un système ouvert en régime permanent. Préciser alors la grandeur volumique énergétique e_T uniforme sur une ligne de courant.

On lui associera une hauteur H appelée hauteur manométrique ou charge totale :

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

où z est l'altitude, p la pression et v la vitesse du fluide au point considéré, ρ sa masse volumique et g l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$). Préciser la relation entre e_T et H.

c) Dans quelles zones de l'écoulement laminaire d'un fluide réel, l'hypothèse d'un écoulement parfait est-elle inenvisageable ?

d) Si on tient compte de la viscosité du fluide incompressible et en postulant toujours un régime stationnaire, la grandeur volumique énergétique e_T définie précédemment varie de A à B le long d'une ligne de courant. Montrer que l'on peut relier cette variation d'énergie volumique à la force volumique de viscosité par la relation :

$e_T(B) - e_T(A) = \int_A^B \vec{f}_{visc} . d\vec{l}$; indiquer et justifier le signe de cette quantité.

e) Dans un fluide incompressible visqueux, la densité volumique de force de viscosité s'écrit $\vec{f}_{\mathrm{visc}} = \eta \Delta \vec{v}$, où η est la viscosité dynamique du fluide et $\Delta \vec{v}$ le laplacien vectoriel de la vitesse locale.

En déduire, sous forme intégrale, la variation $H(B) - H(A)$ de hauteur manométrique d'un point A à un point B le long d'une ligne de courant allant de A à B. La quantité $\Delta H = H(A) - H(B)$ (positive ou nulle) s'appelle la perte de charge.

I.A.2) Écoulement de Poiseuille

On étudie le cas particulier de l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite rectiligne, de direction $\vec{e}_x$ horizontale, de section circulaire S constante (de rayon r_0). Compte tenu des symétries du problème, le champ des vitesses s'exprime sous la forme $\vec{v}(M) = v(r, x)\vec{e}_x$ où $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ est la distance du point M à l'axe de révolution de la conduite.

a) Montrer que la vitesse $v(r, x)$ ne peut dépendre de x.

b) En supposant la perte de charge linéique uniforme tout au long de la conduite et en notant $\dfrac{\partial H}{\partial x} = -a$ (avec $a > 0$), montrer que

$$v(r) = v_{\max}\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right) \qquad \text{avec} \qquad v_{\max} = \frac{\rho g a}{4\eta} r_0^2$$

Dans la symétrie du problème, on a

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\vec{e}_x$$

c) La vitesse débitante U sur une section droite est la vitesse qui, uniforme sur la section S, correspond au même débit volumique Q.

Exprimer cette vitesse en fonction de $v_{\max}$ et en déduire $v(r)$ en fonction du débit volumique Q de fluide dans la conduite.

d) On souhaite un débit d'environ $30\,\mathrm{L{\cdot}s^{-1}}$ dans une conduite de diamètre $D = 20$ cm. Dans une conduite cylindrique, la transition laminaire turbulente se situe aux alentours de nombres de Reynolds de 2300 (dans l'expression du nombre de Reynolds, on choisira respectivement U et D comme ordres de grandeur de la vitesse du fluide et de la dimension transversale de l'écoulement).

– Cas d'une huile (SAE-90) pour laquelle $\eta = 0{,}17\,\mathrm{Pa{\cdot}s^{-1}}$ et $\rho = 880\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$
  - Calculer la perte de charge linéique et donc la surpression nécessaire pour le transport de cette huile sur un tronçon de 50 m.
  - Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclure.

– Cas de l'eau : $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa{\cdot}s^{-1}}$ et $\rho = 1{,}0 \times 10^{3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.
  - Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Conclure.

I.B – *Fluide visqueux homogène incompressible en régime turbulent*

I.B.1) Charge moyenne dans une section à symétrie de révolution

La charge H, exprimée en un point M de l'écoulement, apparait comme une fonction $H(x,r)$ de x et de r. On définit une charge moyenne $\bar{H}(x)$ moyennée sur une section de conduite par

$$\bar{H}(x) = \iint_{\text{section}} H(x,r)\frac{\mathrm{d}Q}{Q} \qquad \text{ou encore } \overline{H} = \frac{\iint_{section} H(x,r)\vec{v}.\overrightarrow{dS}}{\iint_{section} \vec{v}.\overrightarrow{dS}}$$

où dQ est le débit volumique traversant un élément de surface dS de la section de la conduite et Q le débit volumique total de la conduite.

Pour exprimer le terme cinétique de la charge en fonction de la vitesse débitante U, on introduit le coefficient de Coriolis : $\alpha = \dfrac{P_{c\,\text{réelle}}}{P_{c\,\text{uniforme}}}$, où $P_{c\,\text{réelle}}$ est la puissance cinétique traversant la section S de conduite et $P_{c\,\text{uniforme}}$ la puissance cinétique qui traverserait cette section pour une vitesse uniforme U (chaque particule de fluide traverse la section S à la vitesse $v(r)$, emportant avec elle son énergie cinétique volumique locale $\frac{1}{2}\rho v^2(r)$).

a) Montrer que $\alpha = \dfrac{1}{U^3 S}\displaystyle\iint_{\text{section}} v^3(r)\,\mathrm{d}S$.

b) En déduire que la charge moyenne sur une section de l'écoulement (laminaire ou turbulent) s'écrit

$$\bar{H} = z + \frac{p}{\rho g} + \alpha\frac{U^2}{2g}$$

c) Calculer numériquement le coefficient de Coriolis pour l'écoulement uniforme et pour l'écoulement laminaire de Poiseuille.

d) Dans le cas de régimes turbulents courants, les valeurs du coefficient oscillent entre 1,05 et 1,20. Commenter.

I.B.2) Rugosité, diagramme de Moody

La perte de charge régulière moyenne, pour un écoulement incompressible dans une conduite circulaire rectiligne de longueur L et de diamètre D, est donnée par

$$\Delta\bar{H}_l = f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}$$

définissant ainsi le coefficient de perte de charge $f\,(R_e, \varepsilon/D)$ qui dépend du nombre de Reynolds R_e, et par conséquent du régime d'écoulement, et de la rugosité relative ε/D de la conduite. La valeur numérique de ce coefficient est donnée par le diagramme de Moody (figure 7), en fonction du nombre de Reynolds, pour différentes valeurs de la rugosité relative ε/D (lue à droite du graphe).

La rugosité absolue ε a la dimension d'une hauteur sans toutefois représenter une hauteur moyenne des aspérités de la surface intérieure de la conduite : par exemple, pour des conduites métalliques rivetées, le revêtement a peu d'importance devant le nombre et l'écartement des files longitudinales et transversales de rivets.

a) Montrer que l'écoulement de Poiseuille conduit à $f\left(R_e, \dfrac{\varepsilon}{D}\right) = \dfrac{64}{R_e}$.

b) Pour relier la station de pompage au château d'eau, on installe une conduite en fonte de diamètre $D = 20\,\text{cm}$, de longueur $L = 8{,}345\,\text{km}$. Dans les conditions nominales de fonctionnement, cette conduite débite $Q = 30\,\text{L·s}^{-1}$ d'eau. La rugosité de la conduite en fonte dépend de son état de surface, selon qu'elle est neuve ou plus ou moins corrodée. On distingue trois cas

- F1 « fonte neuve » : $\varepsilon_1 = 0{,}4$ mm ;
- F2 « fonte corrodée » : $\varepsilon_2 = 1{,}2$ mm ;
- F3 « fonte déposée » : $\varepsilon_3 = 1{,}6$ mm.

En utilisant l'abaque de Moody, évaluer dans chacun de ces cas la perte de charge moyenne $\Delta\bar{H}_l$ de cette conduite dans ses conditions nominales d'utilisation ($Q = 30\,\text{L·s}^{-1}$).

I.B.3) Pertes singulières

Les pertes de charges singulières en régime turbulent peuvent s'écrire sous la forme

$$\Delta\bar{H}_s = K\frac{U^2}{2g}$$

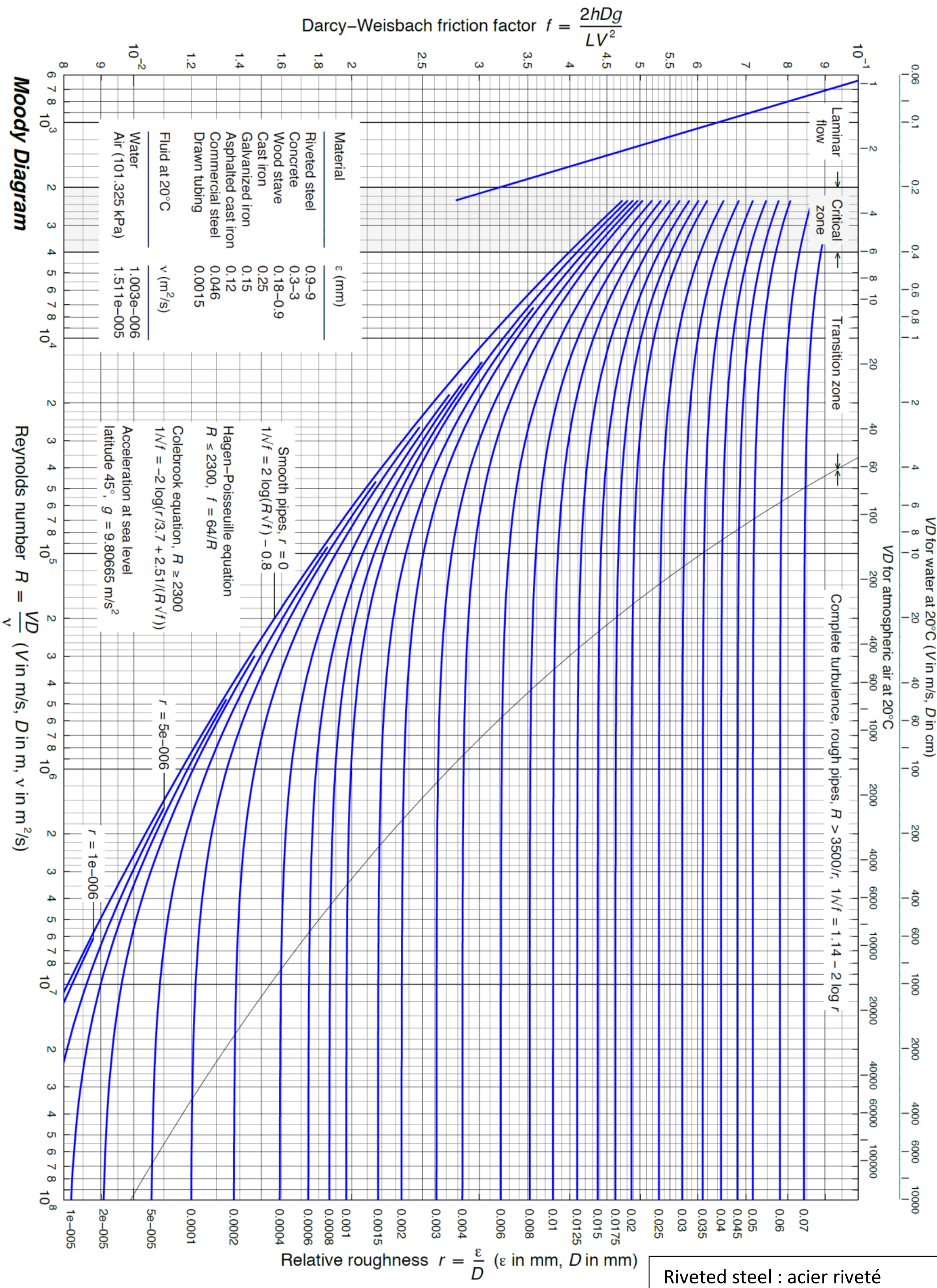
(pertes proportionnelles à KQ^2), ce qui présente un intérêt évident pour le cumul des pertes de charges puisque l'on a écrit

$$\Delta\bar{H}_l = f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)\frac{L}{D}\frac{U^2}{2g}$$

(pertes régulières proportionnelles à LQ^2). Il peut s'agir de pertes dans les rétrécissements, les entrées, les grilles, les diffuseurs, les vannes, les robinets, les clapets, les coudes, etc.

Pour une conduite cylindrique de diamètre $D = 20$ cm et tournant de 90° avec un rayon du coude de 1,5 m, on aura un coefficient K de 0,2. Quelle est la longueur de conduite en « fonte neuve » équivalente à ce coude ?

À titre de comparaison, une entrée saillante de ce diamètre a un coefficient K de l'ordre de l'unité, une vanne à passage direct de 0,1, un robinet à soupape de 6 et un clapet anti-retour à soupape de 70 (soit une longueur équivalente de la conduite précédente de plus de 500 m).



Riveted steel : acier riveté
Concrete : béton
Wood stave : bois franc
Cast iron : fonte
Asphalted cast iron : fonte bitumée
Galvanized iron : fonte galvanisée
Drawn tube : tube étiré