TD N 17 – Diffusion particulaire
Désintégration de l'uranium 235 (Centrale PC – extrait)

On rappelle par ailleurs les expressions d'analyse vectorielle :

- En coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{U}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes ; le plus répandu à l'état naturel, U^{238}, possède 92 protons et 146 neutrons ; l'autre isotope est U^{235} dit isotope « fissile ». Lorsqu'un noyau U^{235} est heurté par un neutron (noté n), il peut « fissionner », suivant la réaction suivante : ${}^{235}U_{92} + n \rightarrow X + Y$ + plusieurs neutrons + énergie, où X et Y sont deux noyaux le plus souvent radioactifs.

Le nombre moyen de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau d'U^{235} est $\nu \approx 2,5$. On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe. L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'U^{235} est en moyenne de $170 \cdot 10^6 eV$ $(1 eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J)$. Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

I.A - Diffusion de neutrons

I.A.1) Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme d'U^{235} ?

I.A.2) L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de $4,2 \cdot 10^9 \mathrm{Joule}$. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme d'U^{235}, exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.

I.A.3) Soit $N(x, y, z, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume, et $\vec{J}$ le vecteur densité de flux de neutrons, tel que $\vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}\ dt$ représente le nombre de neutrons traversant la surface $\overrightarrow{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt. On donne l'équation fondamentale de la neutronique :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{J} + \left(\frac{\nu - 1}{\tau}\right)N(x, y, z, t)\,.$$

On rappelle de plus la loi de Fick $\vec{J} = -D\overrightarrow{\mathrm{grad}}N$ et la relation $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}N) = \Delta N$.

a) En vous aidant d'analogies avec d'autres domaines de la Physique, pouvez-vous interpréter les deux termes situés à droite de l'égalité ?

b) Quelle interprétation proposez-vous pour la constante τ ?

c) Expliquer, en particulier, pourquoi $\nu - 1$ intervient dans le terme de droite, et pas ν.

I.B - Masse critique

On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive.

I.B.1) *Calcul de la masse critique dans le cas d'une boule d'uranium 235 pur, de rayon R*

On suppose que le problème est à géométrie sphérique de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$N = N(r,t) = N_1(r)e^{\nu' t/\tau} \text{ et } \vec{J}(r,t) = -D\frac{\partial N}{\partial r}\vec{e}_r .$$

Dans cette situation, on a :

$$\Delta N_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dN_1}{dr}\right) .$$

a) On pose

$$g(r) = rN_1(r) \text{ et } \alpha^2 = \left|\frac{\nu' - \nu + 1}{D\tau}\right| ;$$

montrer que la fonction $g(r)$ est solution d'une équation différentielle très classique. On recherche une fonction $r \to N_1(r)$ telle que $N_1(r = R) = 0$, que N_1 ne s'annule pas pour $r \in]0, R[$ et telle que N_1 tende vers une limite finie quand r tend vers zéro. Montrer que c'est possible si

$$\nu' = (\nu - 1) - \frac{\pi^2 D\tau}{R^2} .$$

b) Interpréter le fait que ν' augmente si R croît.

c) Quelle est la différence fondamentale entre les cas $\nu' > 0$ et $\nu' < 0$?

d) Exprimer le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de D, τ et ν.

e) On donne pour U_{92}^{235} de masse volumique $\rho = 19 \cdot 10^3 \text{kg m}^{-3}$: $\pi^2 D\tau = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{m}^2$ et $\nu = 2,5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c, ainsi que la masse critique M_c (masse de la boule d'uranium de rayon R_c).

I.B.2) *Mise en œuvre d'une bombe nucléaire*

Pour des raisons évidentes, on ne peut pas stocker sans précautions une masse d'uranium supérieure à la masse critique. Quelle disposition raisonnable pouvez-vous suggérer pour le conditionnement d'une arme nucléaire, embarquée dans un missile ? Comment pourrait-on déclencher l'explosion ?

https://www.youtube.com/watch?v=VE8FnsnWz48