TD N°15 – Coaxial

PROPAGATION LE LONG D'UNE LIGNE COAXIALE

La ligne présente une capacité linéique C_0, une inductance linéique L_0 et une résistance linéique R car les conducteurs (1) et (2) ne sont pas des conducteurs parfaits. Une conductance transversale linéique G complète le schéma équivalent pour modéliser les pertes transversales. Une portion de ligne est représentée sur la figure 3.

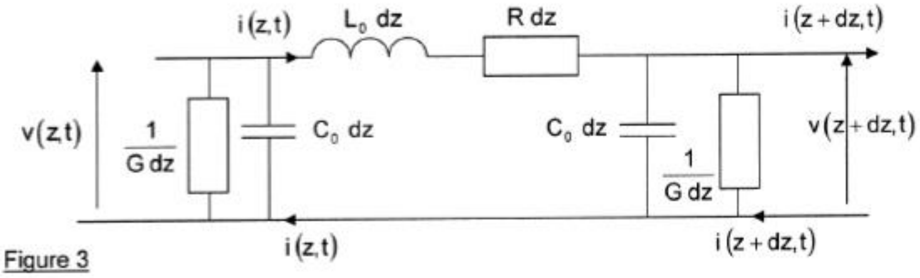


Figure 3

D. EQUATIONS DE PROPAGATION

D1. Etablir les équations exprimant les dérivées partielles $\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}$ et $\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}$, en fonction de $v(z,t)$, $i(z,t)$, $\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$, R, G, L_0 et C_0.

D2. En déduire une équation de propagation pour la tension $v(z,t)$. A quelle équation l'intensité $i(z,t)$ satisfait-elle ?

Considérons une onde $\underline{v}(z,t) = v_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}z)}$ (en notation complexe), se propageant sur la ligne. $\underline{k}$ est une grandeur complexe tel que $\underline{k} = k' + jk''$ où k' et k'' sont des nombres réels.

D3*a. Déterminer la relation de dispersion liant $\underline{k}$ à ω.

D3*b. Définir la vitesse de phase v_φ et une grandeur δ caractéristique de l'atténuation en fonction de k' et de k''.

Dans le cas où R << Lω_0 et G << Cω_0, on donne les expressions, issues d'un DL à l'ordre le plus bas en $\frac{1}{\omega}$ des relations précédentes :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}\left[1-\frac{1}{8}\left(\frac{G}{C_0\omega}-\frac{R}{L_0\omega}\right)^2\right]} \text{ et } \boxed{\delta = \frac{2\sqrt{L_0C_0}}{GL_0+RC_0}\left[1-\frac{1}{2}\frac{R}{L_0\omega}\times\frac{G}{C_0\omega}\dots\right]}$$

Commenter chacune de ces expressions.

Dans toute la suite du problème la ligne est supposée être une ligne idéale, dont les caractéristiques sont telles que R = 0 et G = 0.

D4*a. Montrer que l'équation aux dérivées partielles relative à la tension s'écrit :

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = u^2\,\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$$ où u est un coefficient que l'on explicitera.

Quelle est la dimension de u ?

Quelle est la forme générale des solutions de cette équation ?

D4*b. Retrouver que l'intensité $i(z,t)$ vérifie une équation de propagation.

Il sera admis que les solutions générales s'écrivent sous la forme :

$$v(z,t) = v_1\left(t-\frac{z}{c}\right) + v_2\left(t+\frac{z}{c}\right) \quad \textit{et} \quad i(z,t) = i_1\left(t-\frac{z}{c}\right) + i_2\left(t+\frac{z}{c}\right).$$

D4*c. Interpréter les significations physiques des grandeurs d'indice 1 et 2.

D4*d. Montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_1\left(t-\frac{z}{c}\right) = R_C\, i_1\left(t-\frac{z}{c}\right) \\ v_2\left(t+\frac{z}{c}\right) = -R_C\, i_2\left(t+\frac{z}{c}\right) \end{cases}$$

Que représente R_C ?

F. SIGNAUX IMPULSIONNELS

Dans cette partie le générateur de tension est modélisé à l'aide d'une force électromotrice variable $e(t)$ *en série avec* R_G (figure 5), *telle que pour* $t<0$, $e(t)=0$ *et pour* $t \geq 0$, $e(t)=E$.

F1. En écrivant quatre relations en $z=\ell$, à savoir :

- une relation [$\mathscr{R}$ a], entre $v_s(t)$, R_U et $i_s(t)$,
- une relation [$\mathscr{R}$ b], entre $v_s(t)$, $v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)$ et $v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)$,
- une relation [$\mathscr{R}$ c], entre $i_s(t)$, $i_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)$ et $i_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)$,
- une relation [$\mathscr{R}$ d], entre $i_s(t)$, $v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)$, $v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)$ et R_C,

montrer que :

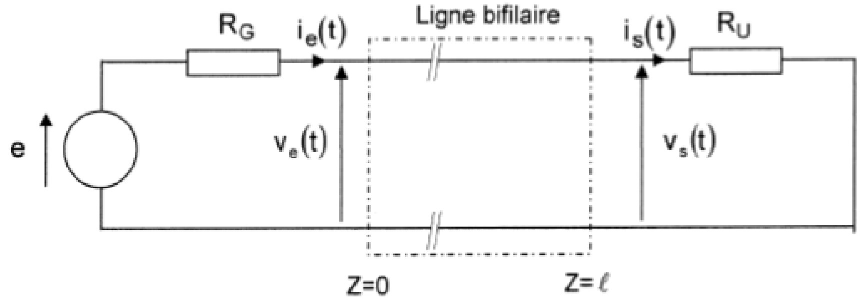
$$v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right) = \alpha\ v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right) \text{ pour } t \geq \frac{\ell}{c}, \text{ où } \boxed{\alpha = \frac{R_U - R_C}{R_U + R_C}}$$

En déduire que : $v_2(t) = \alpha\ v_1\left(t-\frac{2\ell}{c}\right)$.

Quelle est la signification physique de α ?

Calculer α pour $R_U=0$, $R_U=R_C$ et $R_U=\infty$.

Figure 5



F2. De même, en écrivant quatre relations en $z=0$, à savoir :

- une relation [$\mathscr{R}$ e], entre $v_e(t)$, E, R_G et $i_e(t)$,
- une relation [$\mathscr{R}$ f], entre $v_e(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$,
- une relation [$\mathscr{R}$ g] entre $i_e(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$,
- une relation [$\mathscr{R}$ h] entre $i_e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et R_C,

montrer que : $v_1(t)=\frac{E}{2}$ pour $t\geq 0$ et pour $R_G=R_C$.

F3. Pour $R_G=R_C$, tracer les graphes des tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ pour les valeurs suivantes de R_U : $R_U=0$, $R_U=R_C$ et $R_U=\infty$. (*Pour chacun de ces graphes, placer les instants* $\frac{\ell}{c}$ *et* $\frac{2\ell}{c}$)

F4. En reprenant l'étude précédente pour R_G et R_U quelconques, donner l'expression de $v_e(0)$ et $v_e(\infty)$ en fonction de R_G et R_U.
Quel est le schéma électrique équivalent en régime établi ?

Reprenons l'étude avec une « impulsion » définie par :

$e(t)=0$, *pour* $t<0$; $e(t)=E$ *pour* $0<t\leq\frac{\ell}{c}$, ; $e(t)=0$, *pour* $t>\frac{\ell}{c}$.

F5. En considérant que $R_G=R_C$, étudier et tracer le graphe de $v_e(t)$ pour les valeurs suivantes de R_U : $R_U=0$, $R_U=R_C$ et $R_U=\infty$. Pour chacun de ces graphes, placer les instants $\frac{\ell}{c}$, $\frac{2\ell}{c}$, $\frac{3\ell}{c}$.