TD PHYSIQUE N°14
2014 – 2015
CABLE COAXIAL
X-ENS PSI 2009 Extrait

Réalisation de milieux continus à l'aide de composants discrets : application dans le domaine de l'électromagnétisme et de la thermodynamique.

Les progrès de la miniaturisation permettent de réaliser des milieux aux propriétés inhabituelles. Ces milieux sont réalisés par association de composants discrets dont les dimensions dépendent des progrès technologiques et des applications. Il s'agit d'étudier les conditions permettant d'assimiler l'ensemble des composants discrets à un milieu continu pour différents phénomènes de la physique. Une fois cette étude faite, il est possible d'envisager la réalisation de différents milieux et de leurs applications.

La limite finale de cette démarche semble être la nanotechnologie et la nanoscience où l'objet d'étude a des dimensions quasiment atomiques. La limite de la miniaturisation technologique est-elle atteinte ?

I) Propagation des ondes électromagnétiques

On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ avec la célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$ et la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

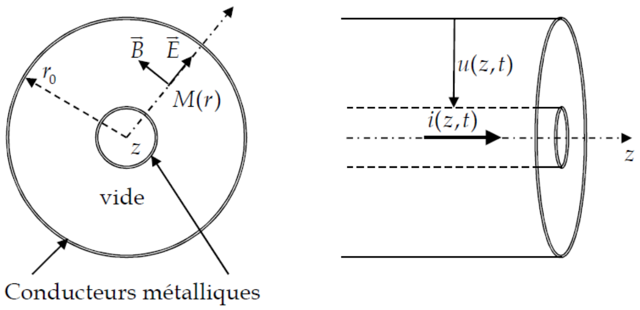
A) Propagation dans un câble coaxial sans pertes

1) Ecrire les équations de Maxwell dans le vide et en déduire les équations de propagation du champ électrique et du champ magnétique. Déterminer la relation que doivent vérifier k et ω pour les solutions progressives sinusoïdales $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kz)}$.

2) On désire maintenant étudier la propagation dans un câble coaxial. Le câble est constitué de deux cylindres réalisés en conducteur que l'on considérera parfait. Le milieu entre les conducteurs est assimilé au vide. On cherche une solution du problème sous la forme $\underline{\vec{E}} = E_0 \frac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u_r}$ et $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} \frac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u_\theta}$, avec $k = \frac{\omega}{c}$.

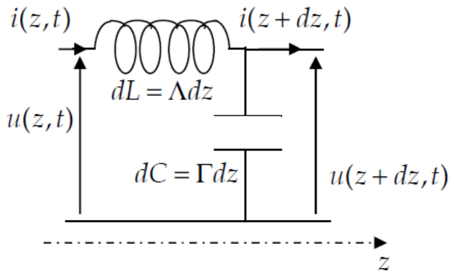
Appliquer le théorème de Gauss pour une surface de Gauss cylindrique d'axe Oz de hauteur h et de rayon r_0 ; en déduire la charge intérieure à ce cylindre.

Appliquer le théorème d'Ampère pour un contour d'Ampère circulaire d'axe Oz et de rayon r_0 ; en déduire l'intensité enlacée correspondante.



3) On fait intervenir l'intensité du courant électrique parcourant le conducteur intérieur $i(z,t)$ et la tension entre le conducteur intérieur et le conducteur extérieur $u(z,t)$. On pose $\underline{i} = \alpha E_0 e^{j(\omega t - kz)}$, déterminer α. On admettra que $\underline{u} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\underline{i}$. Quelle équation aux dérivées partielles est vérifiée par l'intensité et la tension ?

4) On désire représenter la propagation des grandeurs électromagnétiques dans le câble par une ligne à constantes réparties. Une tranche d'épaisseur dz du câble est représentée comme un circuit électrocinétique. Ce circuit obéit aux lois des circuits électrocinétiques linéaires. Une fois ces lois utilisées, on passe à la limite $dz \to 0$.

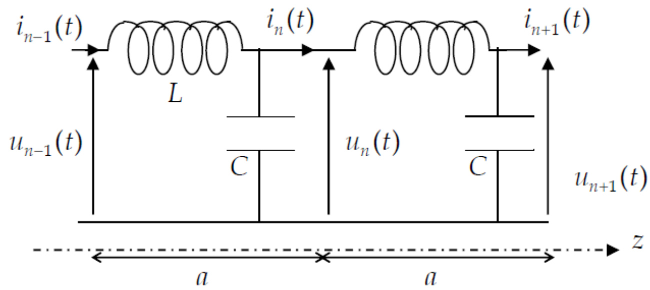


Montrer que la représentation du problème sous la forme d'une ligne à constantes réparties permet d'obtenir la même solution qu'à la question précédente si certaines conditions sont vérifiées par les paramètres Λ inductance par unité de longueur et Γ capacité par unité de longueur. On exprimera Λ, Γ en fonction de ε_0, μ_0.

5) La valeur efficace de l'intensité de l'onde progressive sinusoïdale $\underline{i} = \sqrt{2} I_0 e^{j(\omega t - kz)}$ est notée $I_0 = |\underline{i}|_{efficace}$. Calculer la puissance moyenne transmise dans le câble à l'abscisse x, P_{EM_L}, en fonction de Λ, Γ, I_0. Dans quelle direction est transmise la puissance ?

6) Calculer l'énergie moyenne par unité de longueur de la ligne lors de la propagation de l'onde progressive sinusoïdale w_{EM_L}. Que représente la grandeur $\frac{P_{EM_L}}{w_{EM_L}}$?

7) On désire reproduire à l'aide de composants discrets un circuit dont les tensions et les intensités ont approximativement les mêmes valeurs dans l'espace et dans le temps. On réalise des cellules de base composées d'une inductance et d'un condensateur. Chacune de ces cellules est de longueur a. On les place en chaîne comme sur le schéma.

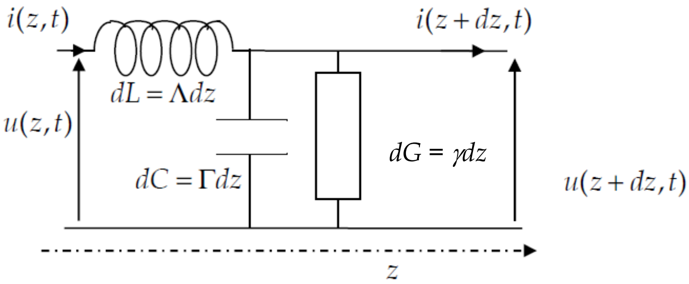


Trouver la relation entre les tensions $u_n(t), u_{n-1}(t), u_{n+1}(t)$ et $\frac{d^2u_n}{dt^2}(t)$. Chercher des solutions sous la forme d'ondes progressives $\underline{u}_n = U_0 e^{j(\omega t - kna)}$. A quelles conditions sur a, L, C les solutions sont-elles identiques à celles de la ligne à constantes réparties ? Comparer la longueur a à la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

8) On dispose de composants de dimensions de l'ordre du centimètre, quels types d'ondes peut-on faire se propager sans dispersion notable ? Même question pour des composants de l'ordre de la dizaine de micromètre ?

B) Atténuation et amplification des ondes électromagnétiques

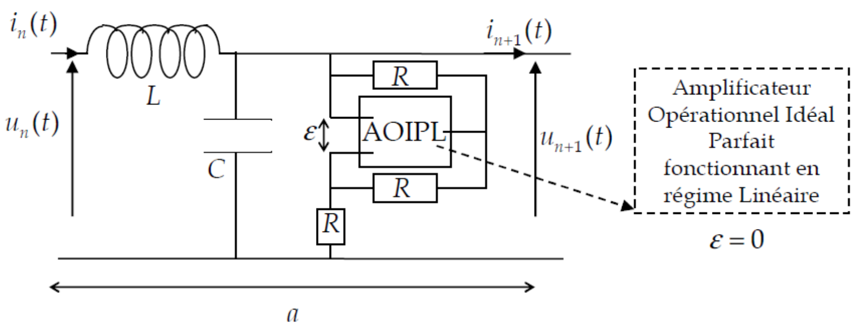
9) Pour prendre en compte les pertes énergétiques lors de la propagation, on complète la représentation de la ligne à constantes réparties. Montrer que les ondes sinusoïdales progressives sont atténuées si $\Upsilon > 0$.



On écrira cette onde $U_0\exp([j(\omega t - \underline{k}z)]$, avec $\underline{k} = k' - jk''$, où k' et k'' sont réels ; on discutera leur signe.

10) On construit, en respectant les conditions du 7) la ligne composée du circuit de base avec un amplificateur opérationnel idéal parfait fonctionnant en régime linéaire. Montrer qu'une onde progressive sinusoïdale amplifiée peut se propager dans cette ligne $\underline{u}_n = U_0 e^{\frac{z}{\ell_c}} e^{j(\omega t - kna)}$, $\ell_c >> \frac{2\pi}{k} >> a$.

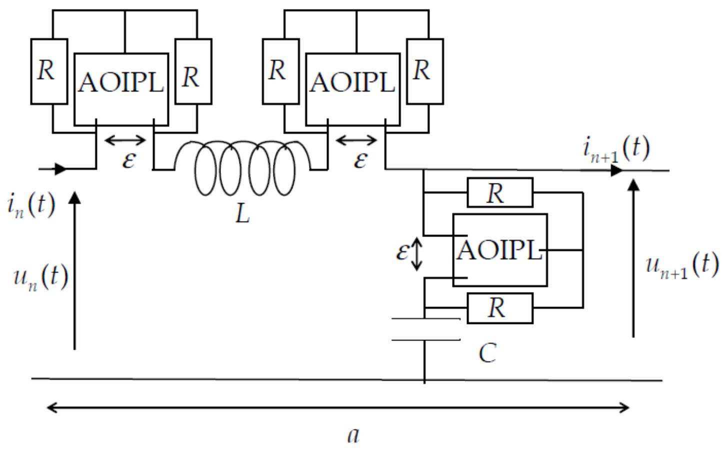
Compte-tenu des hypothèses faites, on adoptera une modélisation continue à partir du schéma ci-dessous :



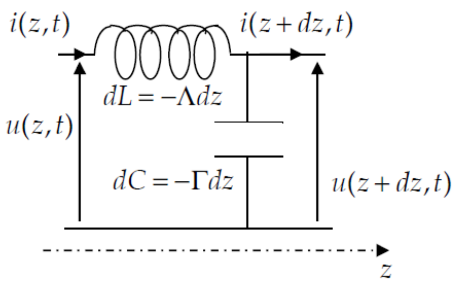
11) Connaissez-vous des dispositifs où l'on utilise une amplification pour des ondes électromagnétiques de longueur d'onde proche du micromètre ?

C) Réalisation d'un milieu paradoxal

14) On construit, en respectant les conditions du 7) la ligne composée d'amplificateurs opérationnels idéaux parfaits fonctionnant en régime linéaire. Montrer qu'une onde progressive sinusoïdale peut se propager dans cette ligne $\underline{u_n} = U_0 e^{j(\omega t - kna)}$, $\frac{2\pi}{k} >> a$.



15) Quelles sont les conditions permettant d'utiliser le modèle de ligne à constantes réparties pour le système précédent ? On exprimera Λ et Γ en fonction de L, C, a, R .



16) La valeur efficace de l'intensité de l'onde progressive sinusoïdale $\underline{i} = \sqrt{2} I_0 e^{j(\omega t - kz)}$ est notée $I_0 = |\underline{i}|_{efficace}$. Calculer la puissance moyenne transmise dans le câble à l'abscisse x , P_{EM_L} , en fonction de Λ, Γ, I_0 . Dans quelle direction est transmise la puissance ?

17) En utilisant la partie I)A), vérifier que les équations de Maxwell pour lesquelles $\varepsilon = -\varepsilon_0, \mu = -\mu_0$ sont compatibles avec le modèle de ligne à constantes réparties précédent.

18) Montrer que, pour une onde plane progressive sinusoïdale $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kz)}$, on obtient une transmission de la puissance dans le sens opposé à la vitesse de phase. On appelle ces milieux, des milieux d'indice négatif !