PSI 2021 – 2022*
TD N°12
Corde vibrante – Membrane vibrante

EXERCICE 1 : Relations de passage pour une corde composée (d'après CCINP)
On considère une corde composée le long d'un axe Ox : l'une de deux parties, située entre - ∞ et 0, a une masse linéique μ_1 et l'autre, située entre 0 et + ∞, est de masse linéique μ_2.

La corde est tendue avec la tension T sur toute sa longueur. Les hypothèses de travail sont celles du cours.

On considère une onde incidente progressive venant du milieu 1 et se dirigeant dans le sens des x croissants, dont on donne la représentation complexe :

$$\underline{z}_i(x,t) = \underline{A}_i \exp(j\omega[t - x/C_1])$$

On veut déterminer les ondes réfléchie et transmise à la séparation des deux milieux.
Les célérités y seront C_1 et C_2.

1) Donner la représentation complexe des ondes transmise et réfléchie. On prendra $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$ comme amplitudes respectives de ces deux ondes en notation complexe.

2) Donner les conditions de passage à la frontière des deux milieux en indiquant au préalable quelles grandeurs sont continues et pourquoi.

3) Déterminer les amplitudes $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$. Définir et donner l'expression des coefficients de transmission et de réflexion en fonction des deux masses linéiques, μ_1 et μ_2.
Étudier trois cas particuliers liés à des valeurs remarquables ou limites de μ_2.

4) On considère $\underline{A}_i$ = A. Exprimer les ondes réelles associées respectivement au milieu 1 et au milieu 2.
a) Donner z(x,t) pour les deux parties de la corde sous forme d'une somme d'un terme progressif et d'un terme stationnaire (l'un des termes peut éventuellement être nul).

b) On donne les expressions de l'énergie linéique de la corde et du flux d'énergie :

$$e = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \text{ et } \Phi = -T\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

D'autre part on admet la relation (l'on pourra montrer à titre d'exercice) :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right).$$

- Commenter l'expression de e et la relation liant e et Φ.

- L'énergie mécanique est-elle continue au passage en O ? Donner l'expression du flux d'énergie qui s'écoule le long de la corde pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et pour l'onde transmise : Φ_i, Φ_r et Φ_t. Vérifier la conservation de l'énergie lors du passage en O.

EXERCICE 2 : Vibration de cymbales (Centrale PSI 2010 - extrait)

Les cymbales sont des plateaux circulaires en métal que l'on frappe pour obtenir un son. Contrairement aux lames de clavier étudiées dans les questions précédentes, elles ne produisent pas un son de hauteur bien définie. Bien qu'une cymbale possède une forme incurvée, nous les assimilerons à de fines plaques planes circulaires de rayon R et d'épaisseur b contenues au repos dans le plan (Oxz). Dans ce cadre, les vibrations transversales consécutives à l'excitation de la surface par un choc obéissent à une équation voisine de celle de la question I.B.3

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c_l^2 b^2}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2}\right) = 0 \text{ avec } \sigma = 0,34\,.$$

I.D.1) On envisage la propagation d'une onde plane progressive du type $y(x, z, t) = y_0 \exp\{\, i[\omega t - \boldsymbol{k} \cdot (x\boldsymbol{u}_x + z\boldsymbol{u}_z)]\}$. ***k*** est le vecteur d'onde de coordonnées (k_x, k_z)

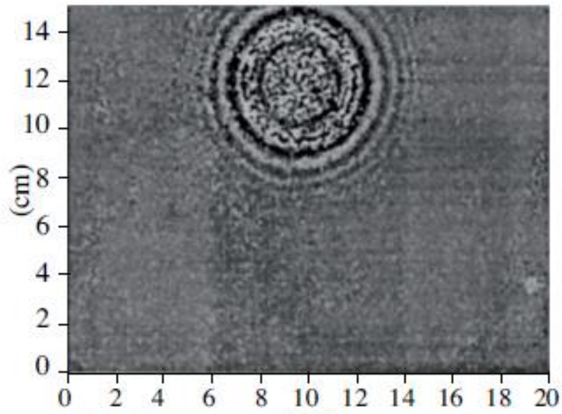

Figure 4a

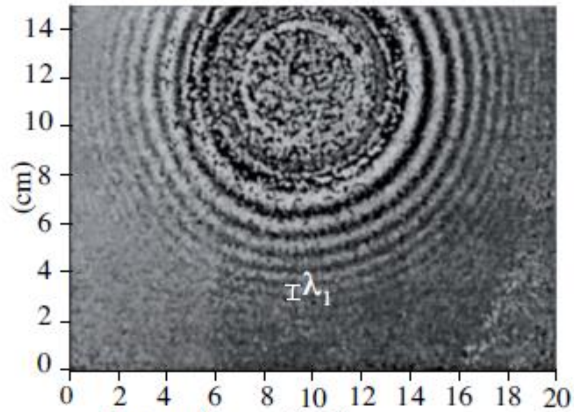

Figure 4b

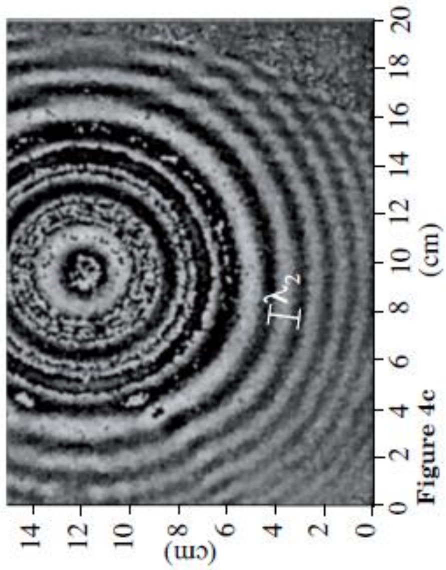

Figure 4a - 4b - 4c - État vibratoire d'une cymbale à trois instants suivant une excitation ponctuelle :

$t = 30\mu s, t = 60\mu s, t = 120\mu s$

Établir la relation entre ω et $k = |\boldsymbol{k}|$. En déduire l'expression de la fréquence f en fonction de la longueur d'onde λ.

I.D.2) Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de la longueur d'onde λ. La propagation est-elle dispersive ?

I.D.3) La figure 4 représente l'état vibratoire d'une cymbale de bronze à divers instants suivant une excitation ponctuelle. L'observation confirme-t-elle la réponse de la question précédente ? Expliquer.

I.D.4) On a signalé sur la figure 4 des déformations de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 6$ mm et $\lambda_2 = 12$ mm. En exploitant les images, déterminer $v_\varphi(\lambda_1)$ et $v_\varphi(\lambda_2)$. Comparer quantitativement ces deux valeurs et confronter le résultat à la prédiction théorique de la question I.D.2. Sachant que la cymbale est en bronze, déterminer son épaisseur b.

On donne $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, où E est le module d'Young du matériau, $E = 1.1\ 10^{11}$ Pa, et ρ sa masse volumique, $\rho = 8.7\ 10^3$ kg.m^{-3}.