PSI 2016 – 2017*

TD PHYSIQUE N°3

Conduction électrique

EXERCICE 1 : Champ de divergence nulle – Résistance

L'espace entre deux cylindres coaxiaux d'axe Oz, de rayons R_1 et R_2, ($R_1 < R_2$) est occupé par un conducteur ohmique de conductivité γ.
La longueur des cylindres est supposée très grande devant R_1 et R_2.
On applique une différence de potentiel constante $V(R_1) - V(R_2)$ entre ces conducteurs.

- Décrire les symétries de la distribution de courant dans l'espace conducteur.
- En déduire la forme du vecteur densité de courant $\vec{j}$.
- Soit I le courant qui circule entre les cylindres, exprimer le vecteur densité de courant correspondant en fonction de I, r et H, hauteur du cylindre.
- Calculer la résistance de ce conducteur entre les deux cylindres en fonction de R_1 et R_2. On rappelle le lien entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique et la loi d'Ohm locale : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

EXERCICE 2 : Sphère radioactive

Une petite sphère radioactive de rayon a, initialement neutre, émet de façon isotrope n charges - e par unité de temps avec une vitesse radiale de norme constante : $\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_r}$.
Déterminer à l'instant t la répartition de charge et de courant dans l'espace pour r > a.

EXERCICE 3 : Conductivité complexe

1) *Évaluer, pour un très bon conducteur comme le cuivre métallique, l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons de conduction, dans un fil de section* $S = 1\ \mathrm{mm}^2$ *, parcouru par un courant* $I = 10\ \mathrm{A}$ *.*

La comparer à la vitesse d'agitation thermique d'un électron libre à la température $T = 300\ \mathrm{K}$ *.*

2) *Évaluer le temps de relaxation* τ *du milieu. En assimilant* τ *à un temps de collision (temps moyen entre deux collisions successives d'une charge de conduction avec le réseau), évaluer le libre parcours moyen* l *des charges de conduction.*

3) *Le champ électrique appliqué au milieu est sinusoïdal, de la forme* $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \,.\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ *en notation complexe.*
Montrer que le modèle précédent nous permet de définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ *en régime sinusoïdal établi.*
Dans quel domaine de fréquence sera-t-il possible d'assimiler la conductivité du milieu à sa valeur en régime permanent ?

Données :
masse d'un électron : $m = 9{,}1 \,.\, 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ *;*
charge d'un électron : $-e = -1{,}6 \,.\, 10^{-19}\ \mathrm{C}$ *;*
constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \,.\, 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ *;*
constante de Boltzmann :
$k_B = 1{,}38 \,.\, 10^{-23}\ \mathrm{J} \,.\, \mathrm{K}^{-1}$.

Cuivre :
- *conductivité :* $\gamma = 5{,}9 \,.\, 10^7\ \mathrm{S} \,.\, \mathrm{m}^{-1}$ *;*
- *masse volumique :* $\mu = 8{,}9 \,.\, 10^3\ \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-3}$ *;*
- *masse molaire :* $M = 64\ \mathrm{g} \,.\, \mathrm{mol}^{-1}$.

On considérera que chaque atome de cuivre apporte un électron de conduction.

EXERCICE 4 : Conduction dans une fine plaque semi-conductrice (Mines-Ponts extrait)

Les mesures de conductivité jouent un rôle important dans l'étude théorique des milieux semi-conducteurs. Ces mesures sont en général menées sur des échantillons plans dont l'épaisseur constante ε est faible devant les autres longueurs intervenant dans le problème. Le matériau considéré est un conducteur de conductivité γ, comportant des porteurs de charge mobiles de charge q en densité particulaire (nombre de particules par unité de volume) n.

L'étude est menée en régime indépendant du temps ; la loi d'Ohm locale est supposée vérifiée.

Le courant électrique i est amené en un point A du matériau par un fil, perpendiculaire à la plaque, confondu avec l'axe (Az). Ce fil est relié au matériau par une électrode cylindrique de faible rayon. Ce courant électrique repart par un fil de même nature et fixé de la même manière au point D ; l'ensemble est représenté sur la figure 1.

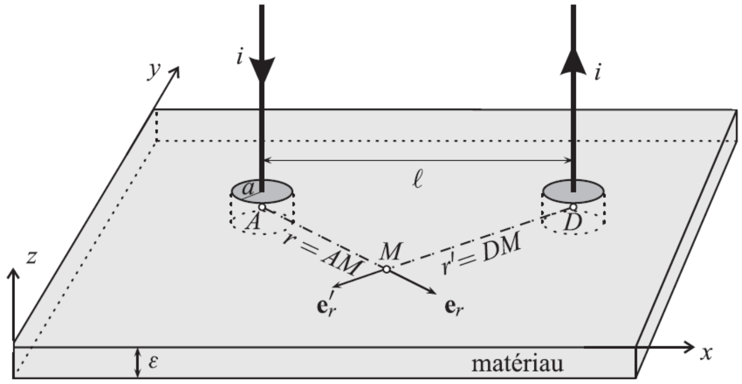

FIG. 1 – Mesure directe de résistance d'une plaque mince conductrice

❑ **1 —** On considère tout d'abord une situation simplifiée, à symétrie cylindrique, dans laquelle on supprime le contact de départ en D. Le courant arrivant en A se répartit donc dans l'ensemble du matériau avec la symétrie de révolution d'axe (Az) : la densité volumique de courant $\mathbf{j}$ en un point M s'y écrit $\mathbf{j}(M) = j(r)\mathbf{e}_r$, où r désigne la distance de M à l'axe (Az) et $\mathbf{e}_r$ le vecteur unitaire radial de cet axe. Exprimer $j(r)$ en fonction de r, ε et i. On considère deux points M_1 et M_2 de la plaque et on note $r_1 = AM_1$ et $r_2 = AM_2$. Déterminer la différence de potentiel $V(M_1) - V(M_2)$ en fonction de i, ε, γ et du quotient r_2/r_1.

❑ **2 —** On remet en place le contact de départ du courant en D. En procédant par superposition de deux situations analogues à celle de la question 1, déterminer la nouvelle expression de $V(M_1) - V(M_2)$ en fonction de i, ε, γ, r_1, r_2, $r'_1 = DM_1$ et $r'_2 = DM_2$. Que vaut cette différence de potentiel si M_1 et M_2 sont sur la médiatrice du segment AD ? Commenter ce résultat.

❑ **3 —** On note $\ell = AD$ et a le rayon des électrodes cylindriques de contact électrique en A et D ; ces électrodes sont formées d'un matériau métallique très bon conducteur électrique et sont donc considérées comme équipotentielles, de potentiels respectifs V_A et V_D. Montrer que si $\ell/a \gg 1$ la résistance électrique de la plaque s'écrit sous la forme $R \simeq R_0 \ln(\ell/a)$, où l'on exprimera R_0 en fonction de γ et ε.

❑ **4 —** *Application numérique* : l'épaisseur de la plaque de semi-conducteur est $\varepsilon = 1,0$ mm. On réalise le dispositif de la figure 1 avec $\ell = 2$ cm et $a = 0,5$ mm. La conductivité du matériau (silicium dopé) est $\gamma = 2,2 \times 10^4\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$. Calculer R, commenter la valeur numérique ; la mesure de R est-elle facile ?

Pour limiter les erreurs dans les mesures de tension on utilise la géométrie de van der Pauw qui élimine l'influence du diamètre des électrodes. Sur la figure 2, les électrodes A et D sont utilisées pour l'arrivée et le départ du courant, et les électrodes P et Q pour la mesure de différence de potentiel $u = V(P) - V(Q)$. On définit enfin la résistance parallèle $R_{//} = u/i$.

❑ **5 —** Déterminer $R_{//}$ en fonction de γ et ε.

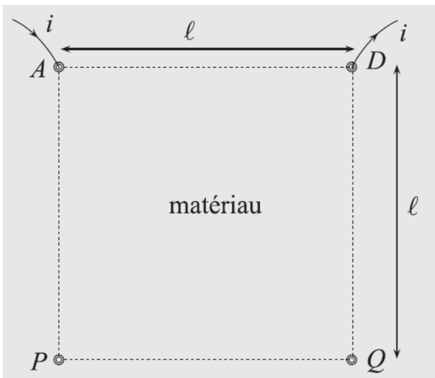

FIG. 2 – Géométrie de van der Pauw : les points A, P, Q et D forment dans cet ordre un carré.