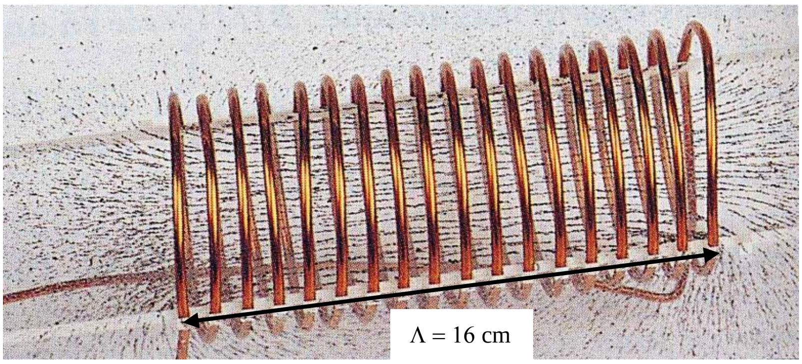
PSI* 2015 – 2016
TD N°7 - Magnétostatique

EXERCICE 1 : Solénoïde

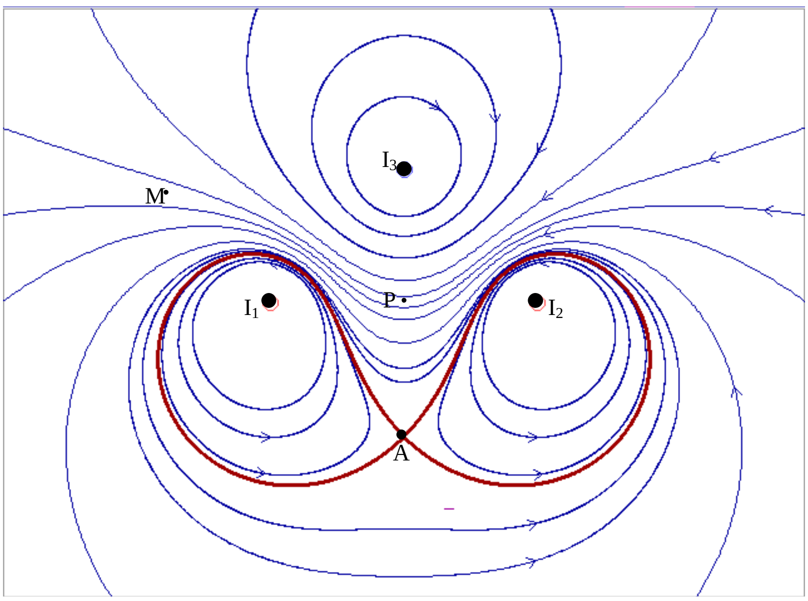
1. Un solénoide de longueur Λ, de section circulaire de rayon a comprend N spires jointives (photo ci-dessous).
   Il est parcouru par un courant I = 10 A. Le champ intérieur mesuré avec un teslamètre au centre du solénoide vaut 1,6 mT.
   Proposer une modélisation simple du champ magnétique à l'intérieur du solénoide.
   Donner l'ordre de grandeur de l'amplitude correspondante ; $\mu_0 = 4*\pi*10^{-7}$ H/m.
   Comparer votre modèle et vos résultats aux observations expérimentales.



2. Déterminer l'inductance propre de ce solénoïde ; commenter sa valeur numérique. Comparer aux bobineshabituellement rencontrées au laboratoire.
3. **A faire après le chapitre suivant (ARQS).** Le courant circulant dans le solénoide est maintenant de la forme : $i(t) = 10\sqrt{2}\cos(2\pi*50*t)$. Etudier le champ électrique induit à l'intérieur du solénoide par le champ magnétique. Comparer énergétiquement les termes magnétiques et électriques ; conclure.

EXERCICE 2 : Etude d'une distribution de courants

Trois fils infiniment longs perpendiculaires à la figure sont parcourus par des courants permanents I_1, I_2, et I_3. Les lignes du champ magnétique sont représentées ci-dessous :



1) En analysant cette figure, indiquer les propriétés du champ et des courants.

2) Quelle est la valeur du champ $\vec{B}$ au point A ?
3) Le champ en M vaut 0,01 T. Estimer la valeur du champ en P.

EXERCICE 3 : Etude d'une ligne bifilaire

Le problème est relatif à l'étude d'une ligne bifilaire et des phénomènes de propagation associés. La longueur ℓ de la ligne est assez grande pour que les effets d'extrémités soient négligés et pour assimiler les champs et potentiels identiques à ceux produits par une ligne infiniment longue.

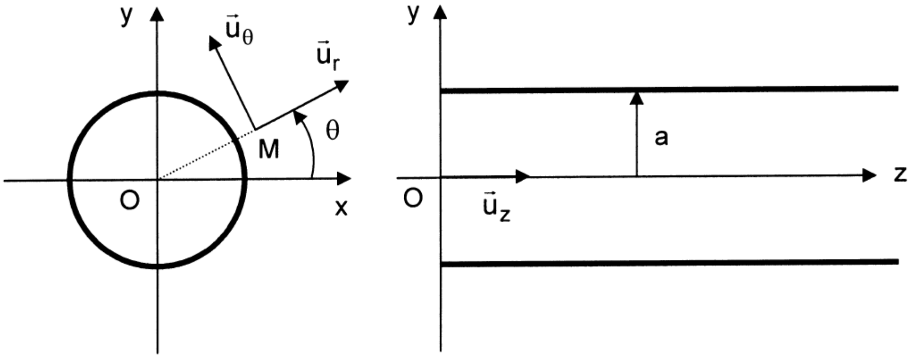


Figure 1

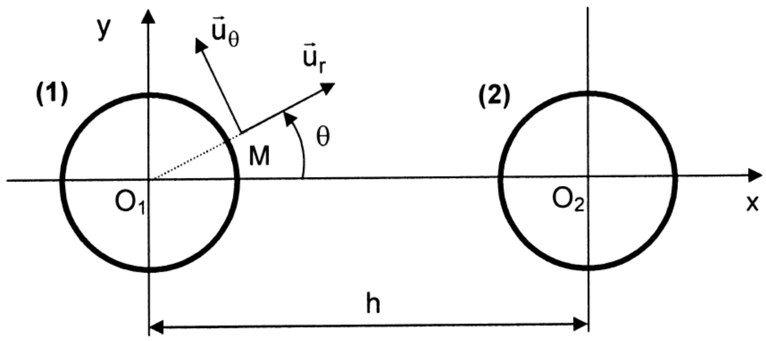


Figure 2

La ligne bifilaire est utilisée pour alimenter une charge. Le conducteur (1) constitue le conducteur aller du courant électrique constant d'intensité I_0 (dans le sens de l'axe Oz). Le conducteur (2) est le conducteur retour de ce courant. La répartition du courant est uniforme sur chaque conducteur. Les vecteurs densité de courant sont respectivement :

$$\vec{j}_1 = \frac{I_0}{\pi a^2}\,\vec{u}_z \quad et \quad \vec{j}_2 = \frac{-I_0}{\pi a^2}\,\vec{u}_z .$$

B1. Montrer que le champ magnétique créé par le conducteur (1) est orthoradial et qu'il ne dépend que de r, tel que : $\vec{B}_1 = B_1(r)\,\vec{u}_\theta$.

B2. A partir du théorème d'Ampère sur un contour à préciser, établir l'expression de $B_1(r)$ en distinguant deux domaines (à définir). Tracer le graphe de $B_1(r)$.

B3. De même, exprimer $\vec{B}$, le champ magnétique résultant créé par les conducteurs (1) et (2), mais uniquement dans le plan défini par les axes des deux conducteurs et entre les conducteurs.

L'ensemble des deux conducteurs forme une bobine d'inductance linéique L_0. Dans la suite du problème, il sera admis que $L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \mathrm{Ln}\left(\frac{h-a}{a}\right)$.

B4. A l'aide d'une figure, montrer ce que représente la grandeur physique $L_0 I_0$.

B5. Que vaut le produit $L_0 C_0$? Application numérique.

EXERCICE 4 : Effet MEISSNER

Un matériau supraconducteur présente une transition de phase à une température dite "critique" Tc. Dans la phase correspondant aux hautes températures (T>Tc), il se comporte comme un matériau normal (phase « Normale »). A toute température T inférieure à Tc (phase « Supraconductrice »), il est caractérisé par deux propriétés macroscopiques remarquables : sa résistance électrique est nulle (Effet supraconducteur) et aucun champ magnétique appliqué ne peut le pénétrer (Effet Meissner). De plus, pour T<Tc, cette phase supraconductrice disparaît lorsqu'un champ magnétique supérieur à un champ magnétique critique Bc(T) est appliqué au matériau. (la variation de Bc(T) est donnée sur la figure 1).

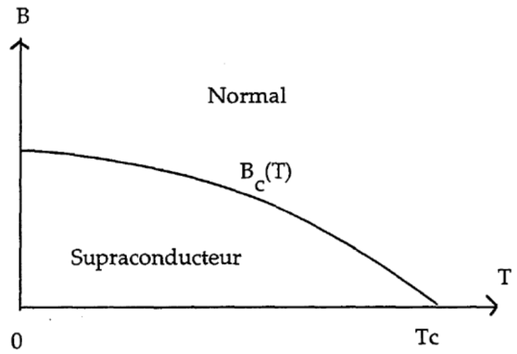


figure 1

1. Lorsque le matériau est dans sa phase supraconductrice et qu'il est soumis à un champ magnétique extérieur, des courants (de densité **j**) apparaissent pour s'opposer à la variation de flux magnétique à l'intérieur du matériau.
   Pour un matériau cylindrique d'axe Oz, ces courants sont ortho-radiaux si le champ appliqué est selon Oz. Soient $\mathbf{v_S}$(t) la vitesse instantanée des porteurs de charges associés à ces courants, m leur masse, e leur charge électrique et n_S leur nombre volumique. Ecrire l'équation de mouvement de chaque porteur (on prendra en compte le fait que, par définition, il n'y a pas de terme d'amortissement du mouvement des porteurs dans un matériau supraconducteur et on négligera le terme magnétique). En écrivant la relation entre **j** et **v**s, montrer que :

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

   Donner l'expression de λ en fonction de m, n_S , e et μ_0. Montrer que λ est homogène à une longueur. Calculer λ dans le cas de l'Aluminium pour lequel :
   m= 0.9 10^{-30} kg, n_s=180 10^{27} m^{-3} , e =1,6 10^{-19} C, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m..

2. On se place en régime quasi-stationnaire. Le matériau est localement neutre (ρ = 0 en tout point). Ecrire les équations de Maxwell pour les champs **E** et **B** en présence de la densité de courant **j** déterminée en 1. En déduire que le champ **B** doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}\right) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2}\right]$$

3. Les frères London ont postulé que la solution à retenir était de la forme

$$\textbf{rot (rot B)} + \frac{\mathrm{B}}{\lambda^2} = \mathbf{0}$$

En déduire que le champ **B** doit satisfaire à l'équation dite "de London" : $\mathbf{\Delta B} - \frac{\mathrm{B}}{\lambda^2} = 0$.

Dans la suite de cette partie, nous considérerons le cas d'une plaque supraconductrice infinie dans les directions x et z , d'épaisseur 2d dans la direction y ; l'origine des espaces O étant choisie au centre de la plaque.

4. On applique le champ **B** = $B_0\mathbf{u_z}$, uniforme et constant à l'extérieur du matériau et on cherche un champ **B** = $B(y)\mathbf{u_z}$ indépendant du temps dans le matériau. Ecrire la solution générale de l'équation obtenue en 3.

5. Les courants étant considérés dans cette partie comme répartis dans le volume du matériau, il n'y a pas de courants surfaciques aux interfaces vide-supraconducteur. Ecrire les conditions aux limites devant être satisfaites par la solution générale dans la géométrie proposée. En déduire l'expression de **B** (y) en fonction de B_0, y, λ et d. Tracer l'allure du graphe de B(y) dans le cas où $\lambda \ll$ d. Sur quelle distance varie la valeur de B à l'intérieur du supraconducteur ?

6. A partir de l'expression obtenue pour le champ dans la question précédente, calculer l'expression de la densité volumique de courant **j**. Tracer l'allure du graphe de j(y) dans le cas où $\lambda \ll$ d . Commenter.

7. **Question à traiter après le chapitre « Milieux magnétiques.** On souhaite désormais décrire le matériau supraconducteur comme un milieu magnétique : la densité de courant **j** dans le supraconducteur est alors considérée comme une densité de courants d'aimantation $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\mathbf{liés}} = \mathbf{rot\ M}$ et la densité de courants libres est nulle. On rappelle par ailleurs la relation :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

qui permet de définir **H**. Dans cette description, on cherche à affecter au matériau des valeurs moyennes spatiales des champs.

- La valeur moyenne du champ **B** à l'intérieur de la plaque est définie par :

$$\left\langle \vec{B} \right\rangle = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} \vec{B}(y)\,dy$$

Calculer cette valeur moyenne en fonction de B_0 , λ , et d.

- En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère en absence de courants libres, montrer que **H** ne dépend pas de y. En déduire l'expression de <**H**> en fonction de B_0 et μ_0 en exploitant la condition aux limites en y = d et l'expression de **H** dans le vide.
- En déduire l'expression de la valeur moyenne de l'aimantation < **M** > en fonction de B_0, λ , μ_0 et d.