

TD N°5 - PSI 2023/2024*

DIFFUSION THERMIQUE

- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques (données avec un nombre de chiffres significatifs adapté) ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés (S.I. n'est pas une unité mais peut dans le texte référer à une unité du système international qu'il vous convient de déterminer).
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ce problème traite du fonctionnement de différents fusibles. Aucune connaissance particulière sur les fusibles n'est demandée.

En 1753, à Saint-Petersbourg, le professeur Richman et son assistant étudient les premières machines électrostatiques. Le 6 août, ils sont frappés par la foudre alors qu'ils chargent des condensateurs. L'assistant s'en sort pratiquement indemne, tandis que Richman meurt immédiatement : la décharge électrique a traversé son corps. La communauté scientifique est extrêmement choquée. Il apparait alors clairement la nécessité de protéger les systèmes électriques et les personnes les utilisant.

C'est Edward Nairne qui fait part pour la première fois de l'utilisation de fils métalliques (qui deviendront l'élément de base d'un fusible) comme moyen de protection lors de décharges de condensateurs. La protection d'un système électrique par un fusible fait appel à un principe de fonctionnement très simple. En situation de fonctionnement normal, le fusible assure le passage du courant. Lors de l'apparition d'un défaut électrique, créant un courant anormalement élevé, le fusible permet la coupure automatique du circuit électrique : le fil métallique constituant le fusible fond en raison de l'apport d'énergie anormalement important du fait du défaut électrique.

L'idée de la protection des systèmes électriques par fusibles s'est imposée formellement avec le double développement de l'électrification et de l'industrie. Dès les premières tentatives, la structure de base des fusibles actuels a été définie avec les éléments essentiels :

- deux pièces de connexion permettant de relier le fusible au reste du circuit électrique ;
- un fil métallique dont le métal constitutif est choisi avec un point de fusion à basse température (typiquement du plomb ou de l'étain) ;
- une cavité qui assure un rôle de protection et qui peut contenir un isolant.

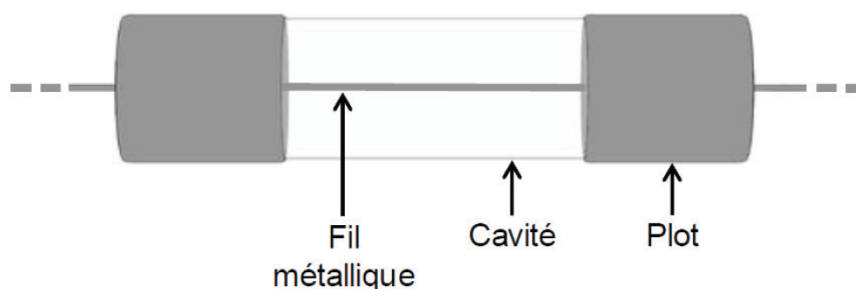


Figure 0 : Schéma de base d'un fusible

Il existe aujourd'hui de nombreux types de fusibles ayant le même principe de fonctionnement et les mêmes éléments de base. On retrouve les fusibles sur les installations domestiques, dans l'industrie (principalement pour l'utilisation avec des charges à fort courant d'appel comme les moteurs) ou pour la protection des semi-conducteurs dans l'ensemble des appareils électroniques.

Données :

- charge élémentaire $e = 1,60.10^{-19}C$;
- masse de l'électron $m_e = 9,11.10^{-31}kg$;
- constante de Boltzmann $k_B = 1,38.10^{-23}J.K^{-1}$;
- constante d'Avogadro $N_A = 6,02.10^{23}mol^{-1}$.

Données relatives à l'aluminium :

- L'aluminium libère exactement trois électrons de conduction par atome ;
- masse volumique de l'aluminium $\mu_{Al} = 2,6989 g.cm^{-3}$;
- masse molaire atomique de l'aluminium $M_{Al} = 27,0 g.mol^{-1}$;
- capacité thermique massique de l'aluminium $c_{Al} = 897 J.K^{-1}.kg^{-1}$;
- enthalpie massique de fusion de l'aluminium $\Delta h_{fus,Al} = 398 kJ.kg^{-1}$.

Caractéristiques de différents métaux :

- température de fusion : T_f
- conductivité thermique : λ
- conductivité électrique : σ

	Plomb	Argent	Aluminium
T_f (K)	600,7	1235	933,5
λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	35,3	429	237
σ (unité S.I. « de base »)	4,81.10 ⁶	6,30.10 ⁷	3,77.10 ⁷

On entend par unité S.I. « de base » l'unité non préfixée (exemple : le mètre et pas le centimètre)

Formule mathématique :

- Laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

B / Etude des fusibles en céramique

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S , de longueur L . On donne la masse volumique μ , les conductivités thermique λ et électrique σ , la capacité thermique massique c du fil métallique. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température.

Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0 . Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible.

Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite.

Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I .

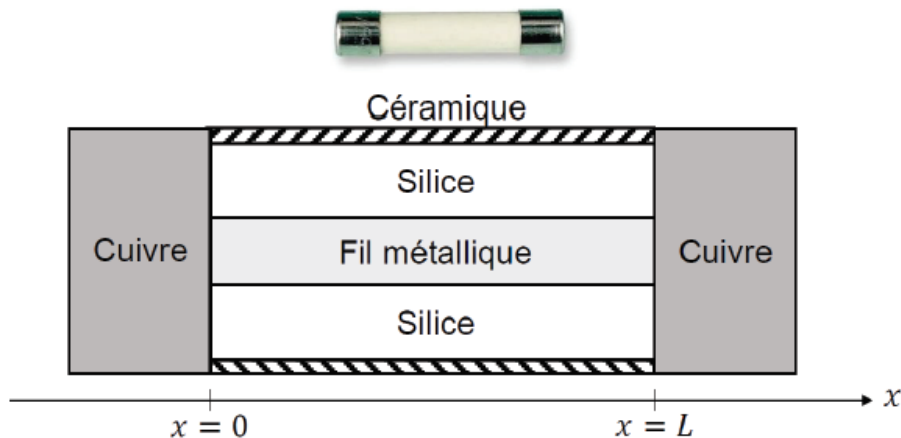


Figure 2 : Fusible en céramique

On considère que le température ne dépend que de la position et du temps : $T(x, t)$

B1. Rappeler la loi de Fourier. Préciser sa signification physique ainsi que celle de chacun de ses termes. Donner les unités de chaque terme.

B2. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

B3. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

La température de fusion du métal est notée T_f .

B4. Donner la position x_{fusion} du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale I_{max} supportée par le fusible.

Pour différents instruments électriques (multimètres, GBF, ...) on dispose au laboratoire d'un ensemble de fusibles dont les valeurs d'intensités maximales admissibles varient. On cherche à déterminer au laboratoire le diamètre D du fil métallique constituant chaque fusible, de l'ordre du micromètre. On mesure la longueur des fusibles : $L = 3,0$ cm.

B5. Proposer une méthode optique permettant de déterminer avec du matériel usuel de laboratoire le diamètre des fils métalliques des différents fusibles. Une description rigoureuse du principe de la méthode est attendue.

Les différents fusibles sont composés du même type de métal. Les mesures pour chacun de l'intensité maximale en fonction de leur diamètre sont effectuées pour $T_0 = 293$ K et résumées dans le tableau suivant :

I_{max} (A)	0,8	1,0	2,0	2,5	4,0	5,0	6,3
D (μm)	57	64	100	114	145	160	188

B6. En explicitant votre méthode, déterminer l'élément chimique le plus probable constituant le fil métallique du fusible. Cette question demande de l'autonomie et sera évaluée en conséquence.

C / Etude des fusibles en verre

Au laboratoire on dispose aussi de fusibles où le fil métallique est entouré d'air. On doit donc tenir compte de la convection entre le fil métallique et l'air environnant.

Les échanges thermiques à l'interface sont modélisés par la loi de Newton. Le flux thermique surfacique cédé à l'air extérieur est $\vec{j}_{conv} = h(T(x) - T_{air})\vec{u}$ avec h le coefficient de transfert convectif et \vec{u} est un vecteur unitaire suivant la normale extérieure à la surface d'échange.

On considère que $T_{air} = T_0$.

Le coefficient d'échange thermique h décrit les transferts de chaleur entre le fusible et l'air.

Le fil métallique est toujours soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif maintenus à la température T_0 .

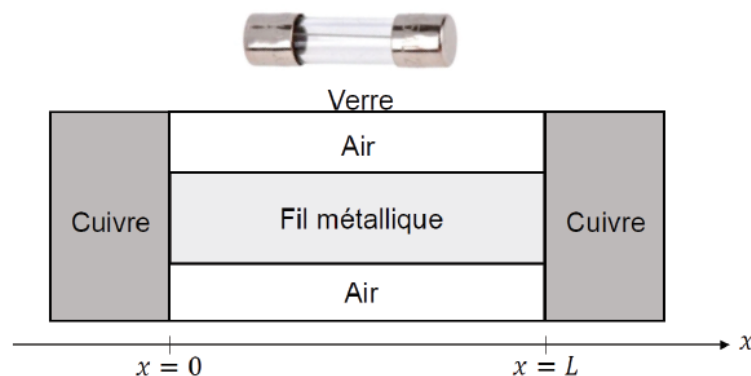


Figure 3 : Fusible en verre

On peut montrer que la température du fil métallique ne dépend que de la position x si Bi le nombre de Biot (sans dimension) est tel que

$$Bi = \frac{hD}{\lambda} \ll 1,$$

avec :

- D le diamètre du fil métallique ;
- h le coefficient de transfert convectif qui est de l'ordre de grandeur de 10 (unités S.I. « de base ») ;
- λ la conductivité thermique du fil métallique.

C1. Justifier que le nombre de Biot est sans dimension. Ce nombre permet de comparer deux grandeurs physiques caractérisant chacune une partie du phénomène ; lesquelles ? Quel est alors l'intérêt de ce nombre ?

C2. Montrer que l'on se trouve dans le cas où $Bi \ll 1$.

On supposera cette condition vérifiée dans tout ce qui suit. La température ne dépend que de la position x et du temps t : $T(x, t)$. On se place en régime stationnaire.

On pose $k = \sqrt{\frac{4h}{\lambda D}}$ et $T_1 = \frac{16I^2}{\sigma \lambda k^2 \pi^2 D^4}$.

C3. Montrer que la température vérifie l'équation

$$\frac{d^2T}{dx^2} - k^2(T - T_0 - T_1) = 0.$$

C4. Résoudre l'équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites.

On montre que T peut s'écrire sous la forme : $T(x) = T_0 + T_1 \left(1 - \frac{\text{ch}\left(k\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)}{\text{ch}\left(\frac{kL}{2}\right)} \right)$.

C5. Tracer l'allure du profil de température.

C6. Quel(s) mode(s) de transfert thermique manque(nt)-t-il(s) à cette étude ?

D / Temps de réponse d'un fusible en verre

Tous les fusibles fonctionnent par interruption du courant. L'intensité nominale (I_n) est l'intensité qui ne provoque ni fusion, ni échauffement excessif. Le standard CEI 60127 prévoit quatre types de fusibles (FF, F, T, TT), chaque type étant défini suivant le temps nécessaire pour couper le fusible parcouru par un courant égal à dix fois le courant nominal :

- FF (ultra-rapide), inférieur à 1 ms ;
- F (rapide) de 1 à 10 ms ;
- T (retard / slow blow, de l'allemand träge = inerte, à grande inertie), de 10 à 100 ms ;
- TT (ultra-retard, Very slow acting), de 100 ms à 1 s.

On se propose dans cette partie d'évaluer le temps de réponse d'un fusible en verre dont le courant nominal est $I_n = 1,0$ A. Le fil constituant le fusible est en aluminium, son diamètre est égal à $64 \mu\text{m}$ et sa longueur est $L = 3,0$ cm.

On suppose dans cette partie que la température du fil constituant le fusible est homogène. On note $T(t)$, la température du fil en fonction du temps.

On néglige les échanges thermiques entre le fil et les plots de cuivre aux extrémités.

Initialement, la température du fil est égale à celle de l'air, supposée constante et égale à T_0 .

D1. Déterminer l'expression de la puissance cédée par convection de la part du fil métallique à l'air extérieur.

Le courant qui circule dans le fusible est égal à $I_1 = 10I_n$.

D2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température est $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_2}{\tau}$ où T_2 et τ sont des constantes dont on précisera l'expression.

D3. Le fusible risque-t-il de fondre ? Montrer que l'on peut négliger les « pertes » par convection. On prendra $h = 10$ (unités S.I.) et $T_0 = 293$ K.

Dans la suite, on négligera les transferts thermiques par convection.

D4. Évaluer la date t_1 de l'instant où débute la fusion.

D5. Calculer l'expression du temps nécessaire à la fusion complète du fusible. Commenter cette valeur. De quel type (FF, F, T, TT) est le fusible ?

D6. Commenter la figure 4 qui donne le temps de fusion complète de différents fusibles en fonction de l'intensité qui les parcourt. Discuter en particulier les formes asymptotiques des courbes, et les types (FF, F, T, TT) des fusibles.

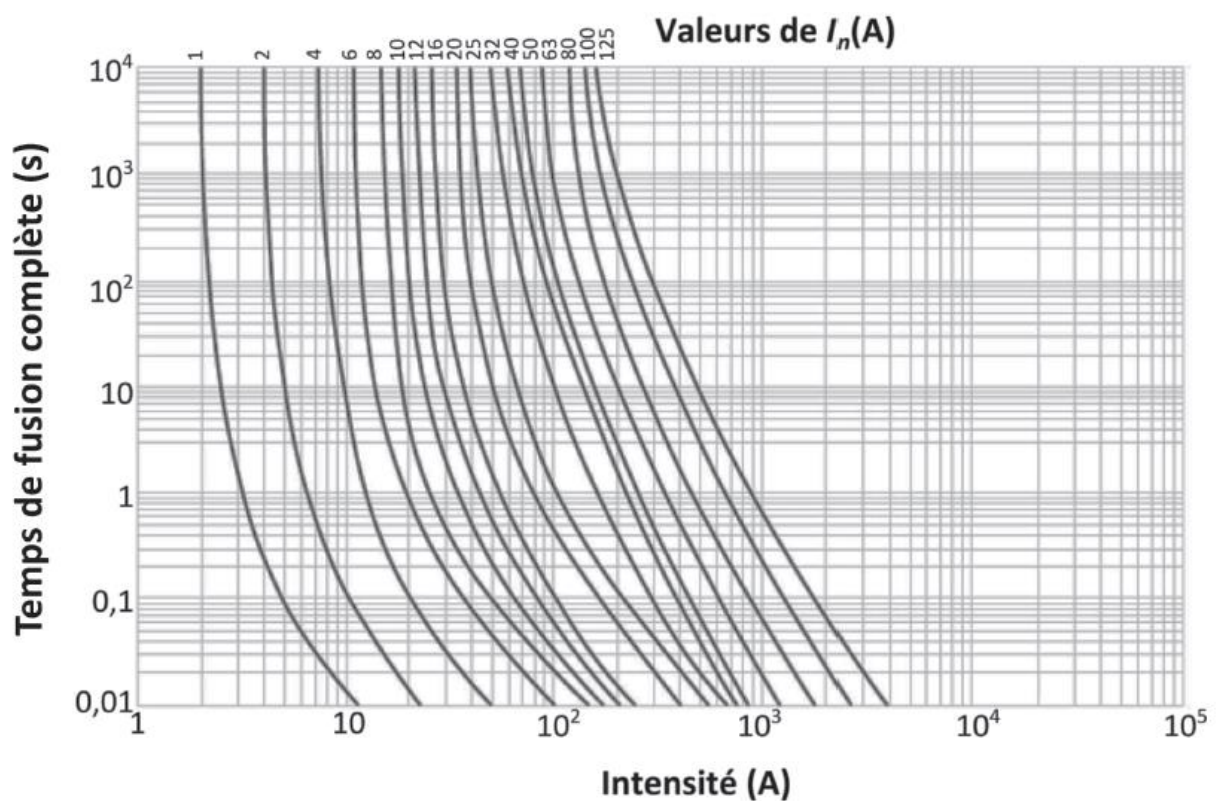


Figure 4 : Courbe de fusion de fusible