D1. La loi des nœuds s'écrit $i(z,t) = i(z+dz,t) + C_0 dz \dfrac{\partial v(z+dz,t)}{\partial t} + Gdz \;\; v(z+dz,t)$.

Après un développement de Taylor et en ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient $-\dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z} dz = C_0 dz \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} + Gdz \;\; v(z,t)$ soit $\boxed{-\dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z} = C_0 \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} + G\, v(z,t)}$.

La loi des mailles s'écrit $v(z,t) = v(z+dz,t) + L_0 dz \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} + Rdz \;\; i(z,t)$.

Après un développement de Taylor et en ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient $-\dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z} dz = L_0 dz \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} + Rdz \;\; i(z,t)$ soit $\boxed{-\dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z} = L_0 \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} + R\, i(z,t)}$.

D2. On dérive la première équation par rapport à t et la deuxième par rapport à z ; on obtient $-\dfrac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = C_0 \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + G \dfrac{\partial\, v(z,t)}{\partial t}$ et $-\dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = L_0 \dfrac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \partial t} + R \dfrac{\partial\, i(z,t)}{\partial z}$. En reportant, on obtient $-\dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = -L_0 \left[C_0 \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} + G \dfrac{\partial\, v(z,t)}{\partial t} \right] + R \left[C_0 \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} + G\, v(z,t) \right]$ soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = \left[L_0 G + R C_0 \right] \frac{\partial\, v(z,t)}{\partial t} + RG\, v(z,t)}$$

On dérive la première équation par rapport à z et la deuxième par rapport à t ; on obtient de même $\boxed{\dfrac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - L_0 C_0 \dfrac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} = \left[L_0 G + R C_0 \right] \dfrac{\partial\, i(z,t)}{\partial t} + R\, G i(z,t)}$.

D3*a. L'équation vérifiée par $v(z, t)$ étant linéaire, on peut chercher une solution sous la forme d'une représentation complexe $\underline{v}(z,t) = v_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)}$. On obtient

$$-\underline{k}^2 v_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)} - L_0 C_0 (-\omega^2) v_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)} = \left[L_0 G + R C_0 \right] j\omega v_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)} + RG\, v_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)}$$

soit, après simplification, $\boxed{\underline{k}^2 = L_0 C_0\, \omega^2 - \left[L_0 G + R C_0 \right] j\omega - RG}$.

D3*b. On peut écrire $\underline{v}(z,t) = v_0 e^{j(\omega t - (k' + jk'')z)} = v_0 e^{k''z} e^{j(\omega t - k'z)}$ La grandeur réelle associée à $\underline{v}(z, t)$ est $\boxed{v(z,t) = v_0 e^{k''z} \cos(\omega t - k'z)}$.

On reconnaît un phénomène de propagation de vitesse de phase $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}}$ et, si $k'' < 0$ (ce qui n'est pas précisé par l'énoncé) de distance caractéristique d'atténuation $\boxed{\delta = -\dfrac{1}{k''}}$.

D3*c. On peut écrire $\underline{k}^2 = L_0 C_0\, \omega^2 \left[1 - j \left[\dfrac{G}{C_0 \omega} + \dfrac{R}{L_0 \omega} \right] - \dfrac{R}{L_0 \omega} \times \dfrac{G}{C_0 \omega} \right]$.

Comme $\dfrac{R}{L_0 \omega} << 1$ et $\dfrac{G}{C_0 \omega} << 1$, on peut développer au deuxième ordre en $\dfrac{1}{\omega}$:

$$\underline{k} = \sqrt{L_0 C_0\, \omega^2} \left[1 - \frac{1}{2} j \left[\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right] - \frac{1}{2} \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} - \frac{1}{8} \left[-\left(\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 + 2j \left(\frac{G}{C_0 \omega} + \frac{R}{L_0 \omega} \right) \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} \right] \ldots \right]$$

d'où $k' = \sqrt{L_0 C_0}\; \omega \left[1 - \dfrac{1}{2} \dfrac{R}{L_0 \omega} \times \dfrac{G}{C_0 \omega} + \dfrac{1}{8} \left(\dfrac{G}{C_0 \omega} + \dfrac{R}{L_0 \omega} \right)^2 \right]$

$$= \sqrt{L_0 C_0}\; \omega \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R}{L_0 \omega} \times \frac{G}{C_0 \omega} + \frac{1}{8} \left(\frac{G}{C_0 \omega} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{G}{C_0 \omega} \times \frac{R}{L_0 \omega} + \ldots \right]$$

$$= \sqrt{L_0 C_0}\; \omega \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{G}{C_0 \omega} - \frac{R}{L_0 \omega} \right)^2 + \ldots \right]$$

et $k'' = -\frac{1}{2}\sqrt{L_0C_0\,\omega^2}\left[\left(\frac{G}{C_0\omega}+\frac{R}{L_0\omega}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{G}{C_0\omega}+\frac{R}{L_0\omega}\right)\frac{R}{L_0\omega}\times\frac{G}{C_0\omega}\ldots\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{L_0C_0}\left(\frac{G}{C_0}+\frac{R}{L_0}\right)\left[1+\frac{1}{2}\frac{R}{L_0\omega}\times\frac{G}{C_0\omega}\ldots\right]$.

On en déduit $\boxed{v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}\left[1-\frac{1}{8}\left(\frac{G}{C_0\omega}-\frac{R}{L_0\omega}\right)^2\right]}$ et $\boxed{\delta = \frac{2\sqrt{L_0C_0}}{GL_0+RC_0}\left[1-\frac{1}{2}\frac{R}{L_0\omega}\times\frac{G}{C_0\omega}\ldots\right]}$ au premier ordre non nul en $\frac{1}{\omega}$.

Il n'y a pas déformation du signal si v_φ ne dépend pas de ω (à l'ordre du calcul). Il n'y a alors pas dispersion. C'est réalisé si $\frac{G}{C_0\omega}-\frac{R}{L_0\omega}=0$ soit la condition $\boxed{GL_0 = RC_0}$. Cette condition est appelée condition de Heaviside.

δ n'est pas nul lorsque cette condition est vérifié : le signal n'est pas déformé mais il est atténué.

D4*a. Avec $R = 0$ et $G = 0$, l'équation de propagation devient $\boxed{\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0C_0}\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}}$ donc $u = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$. On a $u = c$ d'après les expressions de L_0 et C_0 donc u a la dimension d'une vitesse.

La forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert est $\boxed{v(z, t) = f(x - ut) + g(x + ut)}$.

D4*b. Avec $R = 0$ et $G = 0$, l'équation établie en D2 conduit à l'équation

$$\boxed{\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0C_0}\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2}}.$$

D4*c. La phase des fonction v_1 et i_1, v_2 et i_2, couple la variable d'espace et de temps: ces fonctions décrivent donc un phénomène de propagation.

Le signe de z et t est opposé dans la phase des fonction v_1 et i_1 : la propagation est vers les z croissants.

Le signe de z et t est le même dans la phase des fonction v_2 et i_2 : la propagation est vers les z décroissants.

D4*d. On a

$$\frac{\partial i_1(z,t)}{\partial z} = -C_0\frac{\partial v_1(z,t)}{\partial t} = -C_0\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t} = -C_0\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -C_0\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}(-c)$$

donc $\frac{\partial i_1(z,t)}{\partial z} = C_0c\frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z}$ que l'on peut intégrer en $i_1(z, t) = C_0c\, v_1(z, t) + h(t)$. La fonction $h(t)$ ne possède pas une phase qui couple les variables z et t donc elle ne décrit pas un phénomène progressif. On la prend donc nulle et il reste $i_1(z, t) = C_0c\, v_1(z, t)$ ou $v_1(z, t) = R_C i_1(z, t)$ en posant $R_C = \frac{1}{C_0c}$ soit $\boxed{R_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}$. Avec les expressions de L_0 et C_0, il vient $\boxed{R_C = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{h-a}{a}\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$.

F1. La loi d'Ohm s'écrit pour la sortie de la ligne : $\boxed{v_S(t) = R_U i_S(t)}$ [$\mathcal{R}$a].

La tension totale à la sortie s'écrit : $\boxed{v_S(t) = v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)+v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)}$ [$\mathcal{R}$b].

De même, l'intensité totale à la sortie est $\boxed{i_S(t) = i_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)+i_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)}$ [$\mathcal{R}$c].

À l'aide des relations entre v et i pour les ondes incidentes et réfléchies, il vient $\boxed{i_S(t) = \frac{v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)}{R_C}-\frac{v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)}{R_C}}$ [$\mathcal{R}$d].

On reporte [ℛb] et [ℛd] dans [ℛa] et l'on obtient :

$$v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)+v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)=R_U\left[\frac{v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)}{R_C}-\frac{v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)}{R_C}\right] \text{ d'où } \boxed{v_2\left(t+\frac{\ell}{c}\right)=-v_1\left(t-\frac{\ell}{c}\right)\frac{\left[1-\frac{R_U}{R_C}\right]}{\left[1+\frac{R_U}{R_C}\right]}} \text{ qui}$$

est bien de la forme demandée en posant $\boxed{\alpha=\frac{R_U-R_C}{R_U+R_C}}$.

Avec un changement d'origine des temps tel que $t=t'-\frac{\ell}{c}$, on obtient $\boxed{v_2(t')=\alpha v_1\left(t'-\frac{2\ell}{c}\right)}$.

α est le coefficient de réflexion de l'amplitude de la tension.

• Si $R_U=0$ (sortie court-circuitée), on trouve $\alpha=-1$: la tension se réfléchit en changeant de signe.

• Si $R_U=R_C$ (sortie adaptée), on trouve $\alpha=0$: il n'y a pas d'onde réfléchie.

• Si $R_U=\infty$ (sortie ouverte), on trouve $\alpha=+1$: la tension se réfléchit sans changer de signe.

F2. Pour $t\geq 0$, la loi d'Ohm s'écrit à l'entrée de la ligne : $\boxed{v_e(t)=E-R_G i_e(t)}$ [ℛe].

La tension totale à l'entrée s'écrit : $\boxed{v_e(t)=v_1(t)+v_2(t)}$ [ℛf].

L'intensité totale à l'entrée est $\boxed{i_S(t)=i_1(t)+i_2(t)}$ [ℛg].

À l'aide des relations entre v et i pour les ondes incidentes et réfléchies, il vient $\boxed{i_e(t)=\frac{v_1(t)}{R_C}-\frac{v_2(t)}{R_C}}$ [ℛh].

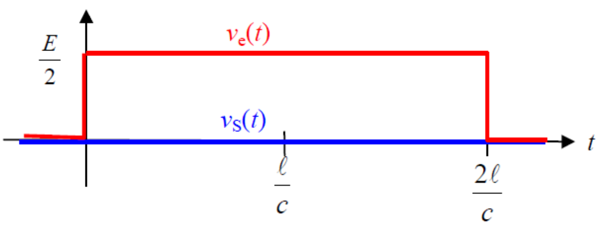
On reporte [ℛf] et [ℛh] dans [ℛe] et l'on obtient, pour $t\geq 0$ et $R_G=R_C$, $v_1(t)+v_2(t)=E-\left[v_1(t)-v_2(t)\right]$ d'où $\boxed{v_1(t)=\frac{E}{2}}$.

F3. En $t=0^+$, il n'y a que l'onde incidente v_1 donc $v_e(0^+)=\frac{E}{2}$. Ce passage de $v_e(0^-)=0$ à $v_e(0^+)=\frac{E}{2}$ se propage à la vitesse c le long de la ligne sans perte et atteint l'extrémité de la ligne à l'instant $t_1=\frac{\ell}{c}$.

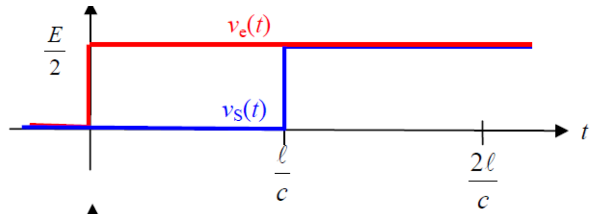
D'après la question F1, l'amplitude de l'onde réfléchie (si elle existe) dépend de la valeur de R_U. Elle se propage aussi à la vitesse c et atteint donc l'origine de la ligne à l'instant $t_2=\frac{2\ell}{c}$.

Comme $R_G=R_C$, l'extrémité $z=0$ se comporte comme une ligne infinie pour une éventuelle onde réfléchie se propageant vers les z décroissants. Il n'y a donc jamais de réflexion à cette extrémité. La valeur de v_S est donc définitive pour $t\geq t_1$ et celle de v_e pour $t\geq t_2$.

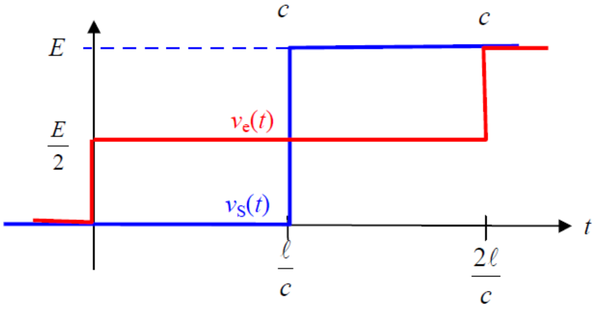
• Si $R_U=0$, $\alpha=-1$ et $v_S(t)=0$ quel que soit t. Pour $t\geq t_2$, l'onde réfléchie, d'amplitude $-\frac{E}{2}$ a atteint l'extrémité $z=0$ donc $v_e=0$. Par contre, pour $0\leq t<t_2$, $v_e(t)=v_1(t)=\frac{E}{2}$. On en déduit les courbes ci-contre :



• Si $R_U = R_C$, $\alpha = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie donc $v_S(t) = v_e\left(t - \frac{\ell}{c}\right)$ avec $v_e(t) = v_1(t) = \frac{E}{2}$ quel que soit $t \geq 0$. On en déduit les courbes ci-contre :



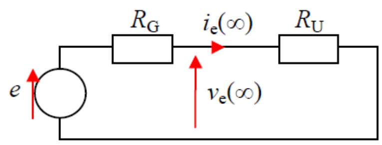
• Si $R_U = \infty$, $\alpha = 1$. Pour $t \geq t_1$, il existe une onde réfléchie , d'amplitude $\frac{E}{2}$ donc $v_S = v_1 + v_2 = E$ pour $t \geq t_1$. Cette onde réfléchie atteint l'extrémité $z = 0$ à l'instant t_2 donc $v_e = E$ pour $t \geq t_2$.. On en déduit les courbes ci-contre :



F4. Si $R_G \neq R_C$, il se produit une réflexion à l'extrémité $z = 0$ de la ligne. Si $R_U \neq R_C$, il se produit une réflexion à l'extrémité $z = \ell$ de la ligne.

En $t = 0$, il n'y a que l'onde incidente v_1 donc les équations de F2 conduisent à $\boxed{v_e(0) = \frac{R_C}{R_G + R_C} E}$.

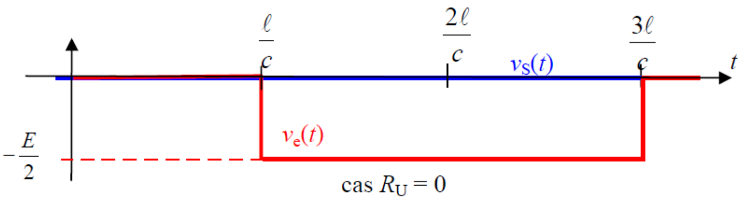
En $t = \infty$, le nouveau régime constant est établi donc les inductances sont équivalentes à des courts-circuits et les condensateurs à des circuits ouverts. Le schéma électrique équivalent est donc le suivant :

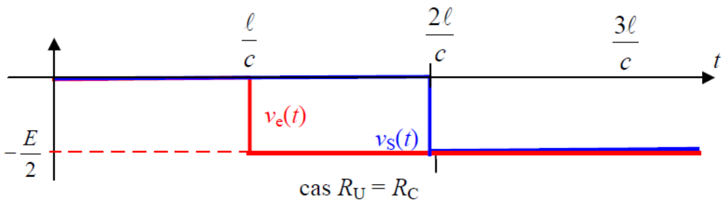


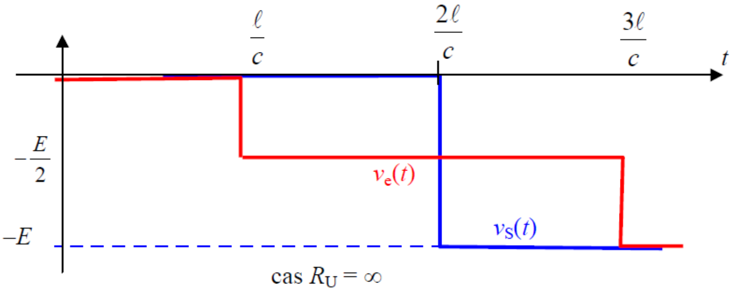
Le théorème du diviseur de tension conduit alors à $\boxed{v_e(\infty) = E\frac{R_U}{R_G + R_U}}$.

Les ondes se propageant à la célérité c, il se produit un changement dans l'état du circuit aux instants où une onde atteint une extrémité ($z = \ell$ ou $z = 0$) de la ligne soit $t_n = n\frac{\ell}{c}$.

F5. On peut appliquer le principe de superposition en considérant un échelon de valeur $-E$ appliqué en $t_1 = \frac{\ell}{c}$. On aurait pour celui-ci les courbes suivantes, dans le cas $R_G = R_C$ où il n'y a pas de nouvelle réflexion en $x = 0$:







Pour l’impulsion, on aura donc :