

**PROBLEME : Association de deux machines (Centrale PSI)**

Partie I - Étude des régimes permanents d'une association de deux machines à courant continu

Deux machines à courant continu  $M_1$  et  $M_2$ , à aimants permanents, considérées comme identiques, sont associées sur le même arbre mécanique, selon le schéma de la figure 1.

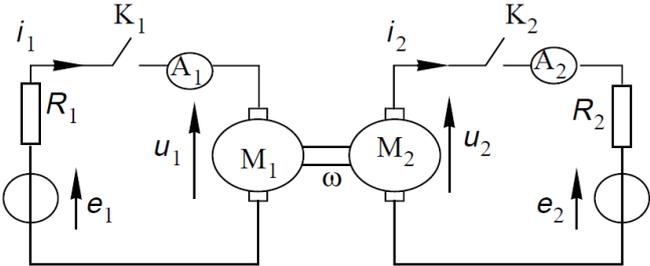


Figure 1 : association de deux machines à courant continu

Chaque machine est en relation électrique avec une source de tension, réversible en courant, modélisée par sa force électromotrice et une résistance ( $e_1$  et  $R_1$  pour le circuit 1 ;  $e_2$  et  $R_2$  pour le circuit 2). La vitesse de rotation angulaire est notée  $\omega(t)$  ; elle est considérée comme positive lorsque la machine  $M_1$  fonctionne en moteur avec  $e_1 > 0$ , et  $M_2$  en génératrice. Chaque machine, dont on néglige l'inductance d'induit et dont la résistance d'induit est notée  $R$ , développe, lorsqu'elle tourne, une force électromotrice  $e_m = \Phi_0 \omega$ , comme le montre le schéma équivalent de la figure 2. Dans cette partie, on néglige toutes les pertes autres que celles qui correspondent à l'effet Joule (sauf dans la question I.B.6) : les pertes dans le fer et les pertes mécaniques sont donc considérées comme nulles. Les intensités  $i_1$  et  $i_2$  des courants traversant les deux machines, comptées positivement dans les sens indiqués sur la figure 1, sont mesurées en régime permanent par les deux ampèremètres  $A_1$  et  $A_2$ .

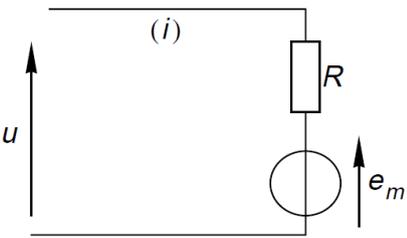


Figure 2 : schéma électrique

**I.A** - On s'intéresse à un régime permanent dans lequel les deux interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$  sont fermés et les forces électromotrices  $e_1$  et  $e_2$  ont pour valeurs respectives  $E_1$  et  $E_2$  avec  $E_1 > E_2 > 0$ .

**I.A.1)** Montrer qu'avec les conventions de la figure 1, les couples électromagnétiques appliqués sur l'arbre commun par les machines sont respectivement de la forme  $T_1 = \Phi_0 i_1$  et  $T_2 = -\Phi_0 i_2$ .

**I.A.2)** Les rotors des deux machines constituent les seuls éléments en rotation. Le moment d'inertie de l'ensemble est noté  $J$ . Préciser la relation qui existe entre  $i_1$  et  $i_2$  en régime permanent.

**I.A.3)** On pose  $R'_1 = R_1 + R$  et  $R'_2 = R_2 + R$ . Donner les expressions de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $\omega$  en fonction des éléments du montage.

**I.B** - On réalise maintenant une séquence d'opérations conduisant, après des régimes transitoires, à des régimes permanents.

**I.B.1)** Les machines sont immobiles. Les interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$  sont tous deux ouverts ; la force électromotrice  $e_1$  est réglée à la valeur  $e_1 = E_1$ . On ferme  $K_1$  à l'instant 0 tandis que  $K_2$  reste ouvert. Donner avec les hypothèses précédentes, les valeurs de  $\omega$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  à l'instant  $0^+$  suivant immédiatement l'instant initial. Caractériser le régime permanent obtenu en précisant les valeurs de  $i_1$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et de la vitesse angulaire  $\omega$  dont la valeur particulière est notée  $\Omega_1$ . Quelle est la fonction (moteur ou génératrice) assurée par chacune des machines  $M_1$  et  $M_2$  ?

**I.B.2)** À partir du régime précédent, on ferme  $K_2$  alors que  $e_2 = 0$ . Exprimer  $i_1$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $\omega$  lorsque le régime permanent est atteint. La valeur particulière de  $\omega$  obtenue est notée  $\Omega_2$ . Comparer  $\Omega_2$  à  $\Omega_1$ .

**I.B.3)** À partir du régime précédent, on augmente  $e_2$  jusqu'à la valeur  $E_2 < E_1$ . Le régime permanent atteint, la vitesse angulaire se fixe alors à la valeur  $\Omega_3$ . Comparer  $\Omega_3$  à  $\Omega_2$  et  $\Omega_1$ .

**I.B.4)** Caractériser le régime permanent correspondant à  $E_1 = E_2$ .

**I.B.5)**  $K_1$  et  $K_2$  étant toujours fermés et  $E_1$  inchangée, on règle  $e_2$  jusqu'à une valeur  $E_2 > E_1$ . Caractériser le régime permanent obtenu, dont la vitesse angulaire est notée  $\Omega_4$ , en précisant les signes de  $i_1$  et  $i_2$ , la fonction de chaque machine et en comparant  $\Omega_4$  et  $\Omega_1$ .

**I.B.6)** On revient au cas I.B.4 ( $E_1 = E_2$ ), mais on tient compte des pertes négligées jusqu'ici. Ces pertes entraînent l'existence d'un couple de pertes de moment négatif, noté  $-T_p$ . Exprimer  $i_1$  et  $i_2$  en fonction des éléments du montage dans le cas particulier où  $R'_1 = R'_2$ . Comment qualifier le fonctionnement de chacune des machines  $M_1$  et  $M_2$  ?

### Partie II - Identification des caractéristiques de l'ensemble des machines

Dans cette partie on modélise les pertes autres que celles dues à l'effet Joule, pour l'ensemble des deux machines, par un couple de frottement visqueux dont le moment vaut  $-T_p = -f\omega$ .

**II.A** - Préciser l'unité du coefficient  $f$ .

**II.B** -  $K_2$  est fermé,  $e_2 = 0$ ,  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 100\Omega$ . Le moment d'inertie de l'ensemble des parties tournantes des deux machines vaut  $J = 1,0 \times 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ . On considère un régime transitoire correspondant à  $K_1$  fermé et  $e_1 > 0$ .

**II.B.1)** Exprimer l'équation différentielle liant  $\omega$  et  $i_1$  ; montrer que pour le moteur  $M_1$ , la génératrice  $M_2$  débitant sur la résistance  $R_2$  présente un couple de même nature qu'un frottement visqueux. On notera  $f_T$  la valeur absolue du coefficient global de frottement visqueux.

**II.B.2)** Écrire l'équation liant  $e_1$ ,  $i_1$  et  $\omega$ .

**II.B.3)** On note  $\Omega(p)$ ,  $I_1(p)$  et  $E_1(p)$  les représentations symboliques respectives des grandeurs  $\omega(t)$ ,  $i_1(t)$  et  $e_1(t)$ . Dédire des résultats des deux questions précédentes les fonctions de transfert :

$$H_i(p) = \frac{I_1(p)}{E_1(p)} ; H_\Omega(p) = \frac{\Omega(p)}{E_1(p)}.$$

Les essais suivants ont été effectués :

Essai 1 : Rotor bloqué (machines maintenues à l'arrêt)

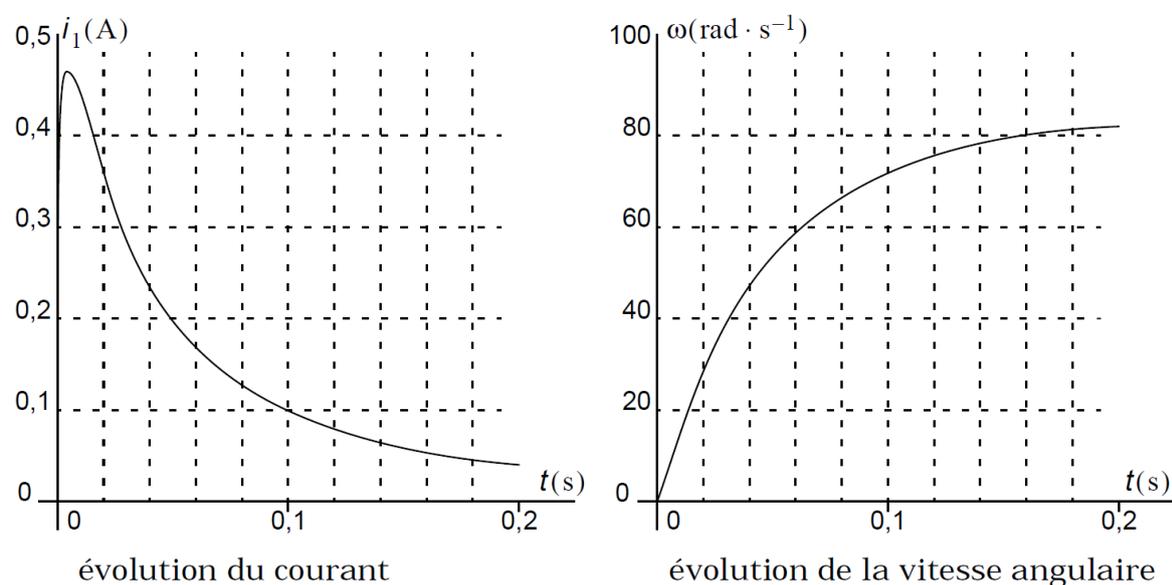
$e_1 = E_1(\text{V})$	1,00	3,00	6,00
$i_1 = I_1(\text{A})$	0,167	0,50	1,01

Essai 2 :  $K_2$  ouvert

$e_1 = E_1(\text{V})$	2,00	4,00	6,00
vitesse angulaire ( $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ )	584	1169	1753

Essai 3 :  $K_1$  et  $K_2$  ouverts. À l'instant initial, la vitesse angulaire est 1700 tours par minute et on observe une décroissance qui amène la vitesse angulaire à 850 tours par minute au bout de 6,9 s.

Essai 4 :  $K_1$  et  $K_2$  sont fermés mais le groupe est au repos car  $e_1 = 0$ . On applique alors au système une tension  $e_1(t)$  ayant la forme d'un échelon d'amplitude  $E_1 = 3,0 \text{ V}$ . Les évolutions au cours du temps de l'intensité du courant  $i_1$  et de la vitesse angulaire  $\omega$  sont données ci-dessous.



## II.C -

**II.C.1)** L'allure de  $i_1(t)$  proposée est-elle compatible avec la modélisation précédente ? Dans le cas contraire, préciser comment diffère l'évolution au cours du temps et proposer une interprétation.

**II.C.2)** L'évolution de  $\omega(t)$  proposée est-elle compatible avec la modélisation précédente ? Dans le cas contraire, préciser comment diffère l'évolution au cours du temps et proposer une interprétation.

**II.D** - À partir des essais précédents, en détaillant la démarche suivie et en faisant figurer, si nécessaire, les constructions graphiques utilisées, évaluer numériquement les paramètres  $R$ ,  $f$ ,  $\Phi_0$  et  $f_T$ . On rappelle que le moment d'inertie de l'ensemble des parties tournantes des deux machines vaut  $J = 1,0 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

### Partie III - Commande électrique en puissance

On se propose de décrire sommairement le dispositif électrique de commande du moteur  $M_1$ . La commande par découpage utilisée est représentée à la figure 3. On admet que la conduction dans  $M_1$  est ininterrompue : le courant d'intensité  $i_1$  ne s'annule jamais.

**III.A** - La séquence de commande des interrupteurs est périodique et, dans le fonctionnement envisagé ici, sur une période de durée  $[0, T]$ ,  $K'$  est fermé pendant  $[0, aT]$  et  $[(1-a)T, T]$ , tandis que  $K$  conduit pendant  $[aT, (1-a)T]$  où  $a$  est un nombre réel compris entre 0 et 0,50.

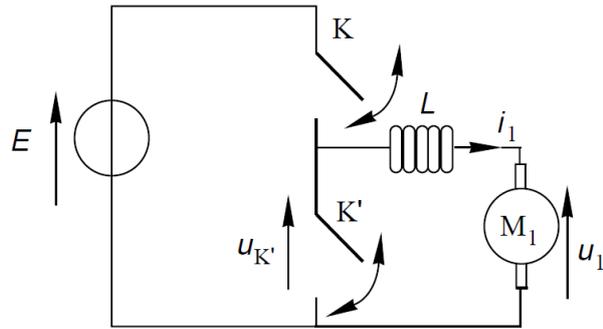


Figure 3 : commande par découpage

**III.A.1)** Représenter l'évolution de la tension  $u_{K'}$  aux bornes de  $K'$  et exprimer sa valeur moyenne  $U_{K'moy}$  en fonction de  $a$  et  $E$ .

**III.A.2)** Quel est le rôle de la bobine d'inductance  $L$ , de résistance nulle, placée entre le moteur et l'alimentation ?

**III.B** - Le moteur  $M_1$  de la figure 3 représente la machine  $M_1$  de la figure 1 qui entraîne la machine  $M_2$ , cette dernière débitant dans une résistance  $R_2$  comme dans la Partie II ( $e_2 = 0$ ,  $R_2 = 100\Omega$ ). On prend de plus  $E = 10V$ . L'ensemble  $e_1$ ,  $R_1$  de la figure 1 est simplement remplacé par le dispositif de la figure 3. On tient compte de la résistance  $R$  dans le schéma équivalent des machines ; le couple de frottement visqueux de coefficient  $f$  envisagé dans la Partie II est également pris en compte.

**III.B.1)** Exprimer en régime permanent, la vitesse angulaire  $\Omega$  en fonction de  $a$ ,  $E$ ,  $R$ ,  $f$ ,  $\Phi_0$  et  $R_2$ .

**III.B.2)** Tracer le graphe liant la vitesse angulaire  $\Omega$  au paramètre  $a$  en prenant  $R = 6,0\Omega$  ;  $\Phi_0 = 3,3 \times 10^{-2}Wb$  ;  $f = 1,0 \times 10^{-6}$  unités SI.

**III.B.3)** Exprimer l'intensité moyenne  $I_1$  du courant traversant la machine  $M_1$  en fonction de  $E$ ,  $a$ ,  $R$ ,  $\Phi_0$  et  $\Omega$ . Application numérique pour  $a = 0,20$ .

**III.C** - On définit le rendement  $\eta$  de la commande en puissance comme le rapport de la puissance électrique moyenne reçue par le dipôle  $M_1$  à la puissance électrique moyenne fournie par la source  $E$ . On suppose  $i_1(t)$  parfaitement constante. Exprimer ces deux puissances en fonction de  $E$ ,  $I_1$  et  $a$ . Déterminer le rendement  $\eta$ . Interpréter ce résultat.

**III.D** - Pour une application ne mettant en jeu qu'une charge résistive pour la machine  $M_2$ , et en ne tenant compte que des régimes permanents, de quel type de fonction de commutation a-t-on besoin pour  $K$  et  $K'$  (parmi les fonctions D : diode et T : transistor du programme) ?

**III.E** - On suppose dans cette question que la machine  $M_2$  est reliée à une source  $(E_2, R_2)$  avec  $R_2$  faible et  $E_2 > U_{K'moy}$ . En régime permanent, la

conduction dans  $M_1$  est de nouveau ininterrompue. Quel est le signe de  $i_1$  ? Quelles sont les fonctions de commutation nécessaires pour  $K$  et  $K'$  ?

#### Partie IV - Positionnement de précision

On désire positionner une antenne, considérée dans la suite comme le mobile, avec une grande précision. On utilise l'ensemble décrit à la figure 4 et composé comme suit :

- une alimentation continue basse puissance délivre une tension dite de consigne notée  $c$ , appliquée à l'entrée P d'un comparateur décrit à la figure 5, constitué d'un amplificateur opérationnel parfait et de quatre résistances de valeurs  $R$  et  $AR$ ,  $A$  étant un coefficient numérique.
- un capteur de position délivre une tension proportionnelle à l'abscisse  $x$  du mobile, ce signal  $r$  est appliqué à l'autre entrée N du comparateur. On notera  $B$  le coefficient de proportionnalité tel que  $r = Bx$  avec  $B = 20V \cdot m^{-1}$ .
- le signal de sortie du comparateur noté  $u$  est appliqué à l'entrée d'un amplificateur de puissance de gain en tension unité, alimentant le moteur.

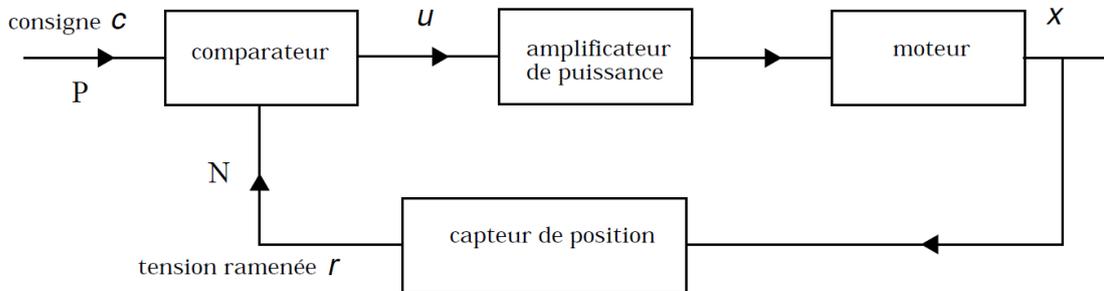


Figure 4 : schéma synoptique du contrôle de position

Les valeurs numériques utilisées dans cette partie sont indépendantes des précédentes, car l'aspect mécanique de l'entraînement (présence d'un réducteur notamment) n'a pas été décrit. On suppose que l'équation différentielle liant la vitesse  $v$  du mobile à la tension  $u$  est de la forme :  $\tau dv/dt + v = Ku$  avec  $K = 0,10 m \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$  et  $\tau = 50 ms$ .

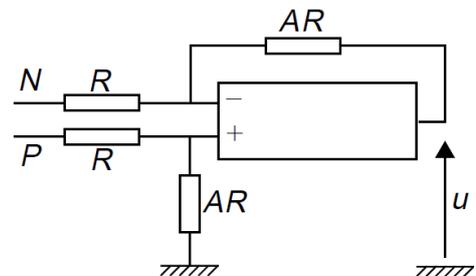


Figure 5 : comparateur

**IV.A** - Représenter un schéma constitué d'un comparateur soustracteur et de blocs, en faisant apparaître les grandeurs  $x$ ,  $v$ ,  $c$  et  $u$  et en indiquant les fonctions de transfert de chaque bloc opératoire. Le comparateur soustracteur sera représenté par le schéma de la figure 6.

**IV.B** - Pour une valeur constante  $C_0$  de  $c$ , quelle est, en régime permanent, la valeur  $X_0$  de  $x$  correspondante ?

**IV.C** - Établir une équation différentielle liant les grandeurs instantanées  $x$  et  $c$ .

**IV.D** - On applique une consigne  $c(t)$  telle que :

$$c(t) = \begin{cases} C_0 & \text{pour } t < 0 \\ C_0 + C & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } C > 0 \text{ et constant}$$

Le régime d'évolution de  $x(t)$  est de type apériodique critique, pour ce faire on règle la valeur du coefficient  $A$ .

**IV.D.1)** Exprimer l'évolution temporelle  $x(t)$  de  $x$ .

**IV.D.2)** Exprimer et calculer numériquement la valeur de  $A$ .

**IV.D.3)** Exprimer les évolutions temporelles  $u(t)$  de  $u$  et  $v(t)$  de  $v$ .

**IV.D.4)** Parmi les courbes 1, 2 et 3, quelles sont celles qui ne peuvent correspondre à l'évolution de  $u(t)$  ? Justifier.

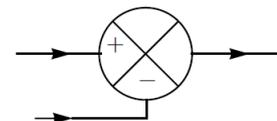
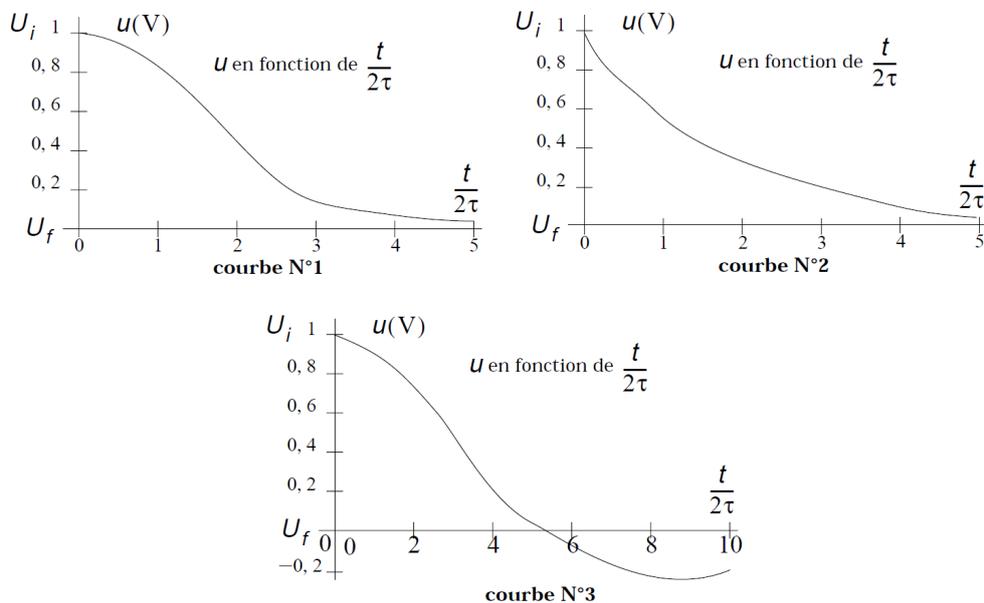


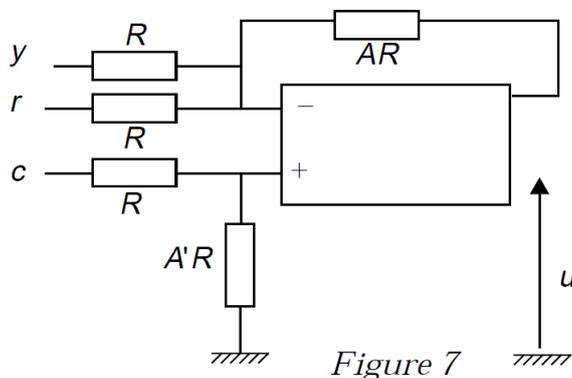
Figure 6 : comparateur soustracteur



**IV.D.5)** À partir de la courbe retenue supposée exacte, déterminer graphiquement le temps de réponse à 10% défini comme la durée, comptée à partir de l'application de l'échelon, au bout de laquelle la variation de  $x(t)$  est égale à 90% de la variation totale.

**IV.E** - On se propose de chercher à réduire ce temps de réponse en modifiant la loi de commande, **tout en maintenant la contrainte d'un régime transitoire de type aperiodique critique**. La grandeur  $u$  de commande de l'amplificateur est obtenue à partir de la position  $x$  et de la vitesse  $v$  par la loi :  $u = A(c - \alpha v - Bx)$ ,  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes que nous cherchons à déterminer.

**IV.E.1)** Sachant qu'un capteur de vitesse fournit une tension  $y = \alpha v$ , montrer que le schéma de la figure 7 permet d'obtenir la tension  $u$  définie ci-dessus.



Exprimer le coefficient  $A'$  en fonction de  $A$  pour réaliser le montage souhaité. Disposant de résistances de valeurs  $R$  et  $AR$ , comment peut-on simplement obtenir une résistance de valeur  $A'R$ ,  $A'$  ayant la valeur précédente ? En déduire le schéma du montage permettant d'obtenir la tension  $u$  à partir des tensions  $c$ ,  $r$  et  $y$  avec un amplificateur opérationnel parfait et des résistances de valeurs  $R$  et  $AR$ .

**IV.E.2)** On observe le régime libre du système, à partir de conditions initiales définies par  $x(0) = X_0$  et  $v(0) = 0$  et du signal de consigne  $c(t) = 0$  pour  $t > 0$ . Les constantes  $K$ ,  $B$ , et  $\tau$  étant inchangées ( $K = 0,10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$  ;  $B = 20 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $\tau = 50 \text{ ms}$ ), on désire que la modification de la commande de l'amplificateur de puissance ait pour effet de ramener à 100 ms le temps de réponse à 10%. Déterminer  $A$  et  $\alpha$  pour qu'il en soit ainsi.

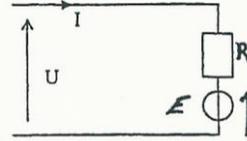
## EXERCICE : Etude expérimentale d'un moteur à courant continu

On s'intéresse à un moteur à courant continu, bipolaire, à excitation indépendante.

La plaque signalétique du moteur indique :

- puissance nominale : 0,80 kW
- vitesse nominale : 1500 tr/min
- tension nominale d'alimentation : 220 V
- intensité nominale d'induit : 4,6 A
- intensité nominale dans l'inducteur : 0,35 A

1) L'induit du moteur en rotation peut être modélisé par le dipôle ci-contre, E est la force contre-électromotrice (f.c.é.m.). Justifier rapidement la relation  $E = \Phi\Omega$  où  $\Omega$  est la vitesse de rotation en rad/s, que représente  $\Phi$  ?



2) Détermination des résistances des circuits inducteurs  $R_e$  et induit  $R_i$ .

a) Une mesure rapide, avec un ohmmètre, de la résistance de l'inducteur donne une valeur affichée de  $512 \Omega$  avec une précision de 0,5% (de la valeur lue)  $\pm 1$  digit. Donner l'intervalle où se situe la valeur  $R_e$ .

b) On veut maintenant mesurer la résistance  $R_i$  du circuit induit. Pour les conditions expérimentales, répondre aux questions ou choisir, en justifiant ce choix, parmi les propositions suivantes :

La mesure s'effectue rotor bloqué ou tournant à vitesse réduite ?

Pourquoi laisse-t-on tourner le moteur à sa vitesse nominale avant la mesure ?

Peut-on utiliser un ohmmètre ?

La mesure a été effectuée par la méthode voltampèremétrique, on a relevé les valeurs suivantes pour lesquelles U est la tension mesurée par un voltmètre numérique d'impédance d'entrée élevée ( $10 \text{ M}\Omega$ ) et I l'intensité du courant dans l'induit :

U(V)	2,31	4,61	6,90	9,20	11,5	13,8
I(A)	0,50	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0

Déterminer la valeur de la résistance  $R_i$ . Représenter le schéma du montage expérimental pour ces mesures en justifiant les positions du voltmètre et de l'ampèremètre.

3) On prendra pour  $R_i$  la valeur  $4,6 \Omega$ . On mesure grâce à une génératrice tachymétrique placée en bout d'arbre, la fréquence de rotation n du moteur en tour/minute.

a) On détermine pour deux valeurs du courant d'excitation  $I_e$  dans l'inducteur les valeurs de E et n.

$I_e = 0,35 \text{ A}$  :

E(V)	240	220	200	150	120	75	20	0
n(tr/min)	1670	1510	1380	1035	820	510	110	0

$I_e = 0,20 \text{ A}$  :

E(V)	186	150	120	90	60	30	0
n(tr/min)	1800	1450	1150	850	560	260	0

a1) Indiquer un mode opératoire permettant de déterminer E.

a2) Tracer sur le même graphe E en fonction de n pour les deux valeurs de  $I_e$  : échelle  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 200 \text{ tr/min}$  et  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 20 \text{ V}$ .

a3) Justifier brièvement l'allure des courbes obtenues.

a4) Montrer que le flux  $\Phi$  n'est pas proportionnel à l'intensité  $I_e$  du courant dans l'inducteur.

b) On relève les valeurs de E et de l'intensité  $I_e$  du courant dans l'inducteur pour une fréquence de rotation maintenue constante,  $n = 1500 \text{ tr/min}$  :

E(V)	219	210	204	198	194	188	179	168	158
$I_e$ (A)	0,39	0,35	0,33	0,31	0,30	0,28	0,26	0,24	0,22

E(V)	147	137	130	107	100	87	78	65	56
$I_e$ (A)	0,20	0,18	0,17	0,14	0,13	0,11	0,10	0,08	0,07

La courbe  $E(I_e)$  est donnée en annexe (document 1), en fin d'énoncé.

Justifier, en quelques lignes, l'allure de cette courbe.

4) On note :

- $P_a$  : la puissance électrique absorbée totale (induit et inducteur),
- $P_{tr}$  : la puissance électrique transmise au rotor,
- $P_u$  : la puissance mécanique disponible sur l'arbre,
- $P_{je}, P_{ji}$  : les pertes par effet Joule respectivement dans l'inducteur et dans l'induit,
- $P_c$  : les pertes autres que par effet Joule.

a) Avec les notations ci-dessus, représenter le bilan de puissance du moteur à courant continu à excitation indépendante.

b) Le terme  $P_c$  regroupe les pertes mécaniques  $P_m$  et les pertes fer  $P_f$  : expliciter brièvement ces termes, de quels paramètres dépendent-ils ?

c) Un modèle équivalent de l'induit a été donné au 1), proposer un modèle de l'inducteur quand le moteur est en régime établi et en déduire les expressions de  $P_a$ ,  $P_{je}$  et  $P_{ji}$ .

5) Essai à vide à vitesse constante  $n = 1500$  tr/min.

a) Pour les conditions expérimentales, répondre aux questions suivantes, en justifiant votre réponse :

On met sous tension l'inducteur avant l'induit ou l'inverse ?

On commence avec  $U = 0$  et on augmente progressivement ou bien on démarre sous  $U$  nominale ?

Lors de l'essai, comment obtient-on une vitesse constante égale à la vitesse nominale alors que  $U$  varie et reste inférieure à  $U$  nominale ?

b) Montrer que l'on peut obtenir, pour chaque valeur de  $I_c$  dans l'inducteur, grâce au bilan de puissance, la valeur de  $P_c$  en mesurant la tension  $U$  aux bornes de l'induit et l'intensité  $I_i$  du courant dans l'induit.

c) On relève les valeurs suivantes :

$U(V)$	222	213	198	176	151	120	85
$I_i(A)$	0,43	0,44	0,45	0,48	0,56	0,66	0,92
$I_c(A)$	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10

Tracer  $P_c$  en fonction de  $I_c$  : échelle 1 cm  $\leftrightarrow$  0,1 A et 1 cm  $\leftrightarrow$  10 W.

d) Déduire de la courbe précédente la valeur des pertes mécaniques  $P_m$  à 1500 tr/min.