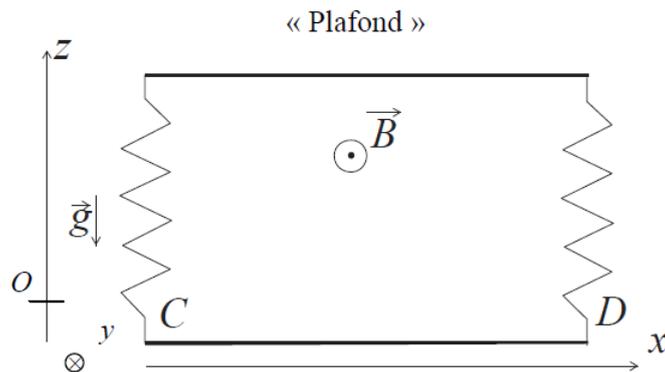


## TD N°11 - INDUCTION - ARQS

**EXERCICE 1 : Amortissement d'oscillations (CCP PSI)**

Une tige  $CD$  de cuivre de masse  $m$  et de longueur  $L$  est suspendue par ses deux extrémités à deux ressorts identiques de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  (**figure 10**). Le courant électrique peut circuler à travers les ressorts et le « plafond ». On note  $R$  la résistance électrique de tout le circuit et on négligera le phénomène d'induction dans les ressorts et d'auto-induction dans le circuit. On appelle  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Un champ magnétique uniforme et constant  $B$  est appliqué orthogonalement au plan de la figure.



**Figure 10 : dispositif électro-mécanique**

**B.6** Le système est au repos. Quelle est la longueur des ressorts dans ce cas ?

**On placera l'origine de l'axe ( $Oz$ ) au niveau de la barre quand elle est à l'équilibre.**

**B.7** On appelle  $e_{ind}$  la force électromotrice induite dans la tige orientée dans le sens de  $C$  vers  $D$ .

La vitesse de la barre vaut  $\frac{dz}{dt} \vec{e}_z$ . Exprimer  $e_{ind}$  en fonction des données du problème.

**B.8** On note  $i(t)$  l'intensité du courant électrique parcourant le circuit et orienté dans le sens de  $C$  vers  $D$ . Calculer la force de Laplace qui s'applique sur la tige en fonction de  $i(t)$ ,  $B$ ,  $L$  et du vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ .

**B.9** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $z(t)$ . On posera  $\frac{B^2 L^2}{mR} = 2\alpha$  et  $\frac{2k}{m} = \omega_0^2$ .

**B.10** On supposera que :  $\omega_0^2 - \alpha^2 = \gamma^2 > 0$ . Quel est le régime obtenu ?

Déterminer complètement  $z(t)$ , en fonction de  $\alpha$  et  $\gamma$ , en prenant comme conditions initiales  $z(0) = 0$  et  $\frac{dz}{dt}(0) = V_0 > 0$ . Tracer l'allure de  $z(t)$  en indiquant l'enveloppe exponentielle.

**B.11** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la barre entre l'instant de départ et l'instant infini pour calculer le travail de la force de Laplace. En déduire sans calcul supplémentaire l'énergie Joule dissipée entre l'instant initial et l'instant infini.

## EXERCICE N°2 : Effet de peau dans une plaquette (E3a – Extrait)

Un milieu conducteur de conductivité  $\sigma = 6 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$  s'étend dans le demi-espace  $z > 0$ .

À l'extérieur du conducteur, règne un champ magnétique variable  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$ , comme le montre la figure 2.

Données numériques : vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1},$$

perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1},$$

permittivité absolue du vide

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}.$$

### A-1 Propriétés des champs dans le conducteur

**A1\*a.** Montrer que dans le conducteur, toute charge volumique  $\rho$  décroît exponentiellement vers zéro, en fonction du temps. Évaluer numériquement le temps caractéristique de cette évolution.

**A1\*b.** Justifier que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction si la fréquence du champ utilisée est inférieure au MHz.

Dans la suite du problème, il conviendra de prendre  $\rho = 0$  dans le conducteur et de négliger le terme en  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

**A1\*c.** Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu conducteur avec ces hypothèses, en faisant uniquement apparaître la densité de courant  $\vec{j}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$ .

En notation complexe, une solution de ces équations pour  $\vec{B}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(z,t) = b_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}z)] \vec{u}_y, \text{ où } \underline{k} \text{ peut être complexe.}$$

**A1\*d.** Déterminer la forme que doit alors prendre la densité de courant  $\vec{j}(z,t)$  en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère.

**A1\*e.** Etablir, grâce à l'équation de Maxwell-Faraday, la relation suivante :  $\underline{k}^2 = -i\mu_0\sigma\omega$ .

### A-2 Cas du conducteur infini

Le conducteur occupe tout le demi-espace  $z > 0$  (figure 2).

**A2\*a.** Montrer que, nécessairement,  $\underline{k} = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$ .

**A2\*b.** En écrivant les conditions de passage en  $z = 0$ , vérifier que  $b_0 = B_0$ .

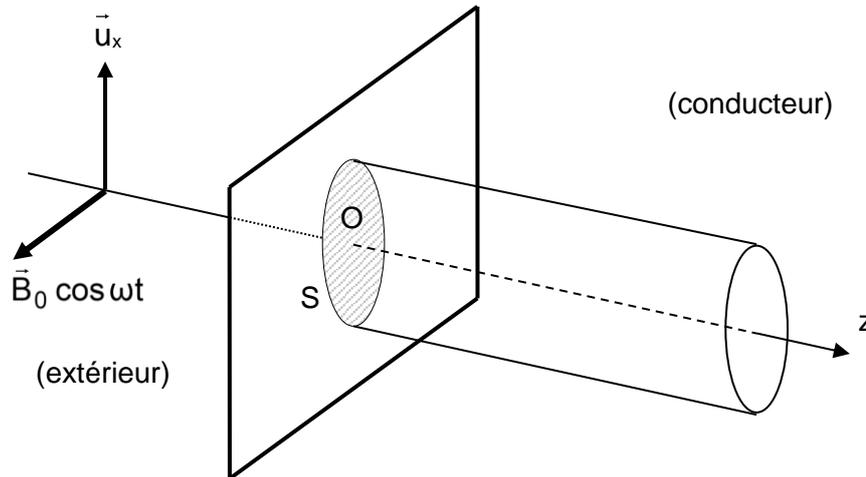
**A2\*c.** Etablir les expressions réelles de  $\vec{B}(z,t)$  et de  $\vec{j}(z,t)$ , en posant  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$ .

**A2\*d.** Donner une interprétation physique de  $\delta$ .

**A2\*e.** Calculer  $\delta$  pour le conducteur considéré, pour les fréquences  $f_1 = 100 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 125 \text{ kHz}$ .

**A2\*f.** Déterminer la puissance volumique  $P_v$  cédée par le champ électromagnétique au conducteur ; préciser sa valeur moyenne.

**A2\*g.** Exprimer la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  cédée par le champ électromagnétique au conducteur dans tout le volume d'un cylindre d'axe parallèle à Oz, de longueur infinie et de section S, découpé dans le conducteur.



**Figure 2**

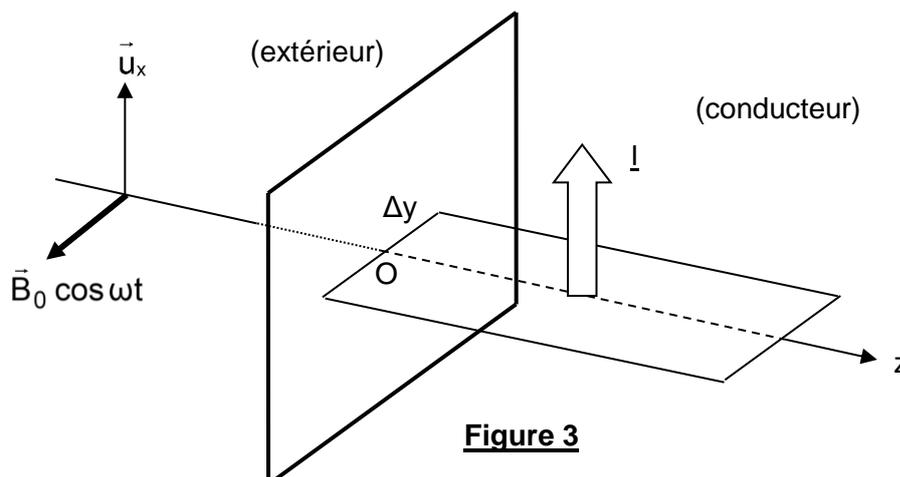
**A2\*h.** En déduire la puissance thermique  $\Phi_0$  reçue par le conducteur par unité de surface extérieure.

**A2\*i.** Calculer  $\Phi_0$  pour la fréquence  $f_2 = 125 \text{ kHz}$  et pour un champ magnétique extérieur d'amplitude  $B_0 = 0,5 \text{ T}$ .

**A-3** Courant surfacique équivalent (conducteur semi-infini)

**A3\*a.** Quel est le courant élémentaire  $d\underline{I}$  qui traverse un rectangle élémentaire (voir figure 3), parallèle au plan yOz, de côtés dy et dz, orienté selon  $\vec{u}_x$  ? (utiliser la notation complexe)

**A3\*b.** Montrer que le courant total  $\underline{I}$  qui traverse un ruban de largeur  $\Delta y = \ell$  et s'étendant sur toute la profondeur du conducteur peut s'écrire sous la forme :  $\underline{I} = \frac{\ell B_0}{\mu_0} e^{i\omega t}$ .



**Figure 3**

À la limite où la zone de conducteur perméable au champ est d'épaisseur nulle, considérons que ce conducteur est parcouru en surface par un courant  $\vec{j}_s = j_{s0} e^{i\omega t} \vec{u}_x$  et que le champ est nul en tout point intérieur au conducteur.

**A3\*c.** A partir de l'expression de  $\delta$  dire à quelle hypothèse cela correspond pour  $\sigma$ .

**A3\*d.** Quelle valeur doit être affectée à  $j_{s0}$  pour obtenir le courant  $I$  du **A3\*b** ?

**A3\*e.** Retrouver cette valeur en utilisant les relations de passage.