ψ^* 2020 : TD 14 des 4 et 6 janvier
Séries entières

1. Domaine de définition et expression explicite sur $]-R, R[$ des fonctions suivantes :

   a. $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\, x^{2n+1}$

   b. $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!}\, x^{n}$

   c. $H : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}\, x^{n}$

2. $F : x \mapsto e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$ avec x réel.

   a. Montrer que F est développable en série entière, sur un intervalle à préciser.

   b. Montrer que F est solution d'une EDL1, et en déduire les coefficients de son DSE.

   c. Trouver une expression explicite de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \dbinom{n}{k}$.

3. $E : \quad (1 + x^2)y'' + 3xy' + y = 0$

   a. Trouver les solutions DSE, préciser leur intervalle de définition.

   b. Calculer $\binom{-1/2}{p}$ et en déduire l'expression d'une solution non nulle de E.

4. On note f la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente, et T_n le polynôme de Taylor d'ordre n de f en 0.

   a. Montrer que :

      i. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^{n+1}(f) = D^n(f^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(f) D^k(f)$.

      ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $(D^n f)(x) \geq 0$.

   b. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \, , \, \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[\, , \, T_n(x) \leq f(x)$$

   c. Déduire de ce qui précède que la série de Taylor de f converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Que peut-on en déduire pour son rayon R ?

   d. On pose $a_n = \frac{1}{n!} (D^n f)(0)$; calculer $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k$ en fonction de a_{n+1} et n.

   e. On note g la fonction somme de la série de Taylor de f.
   Montrer que $\dfrac{g'}{1+g^2} = 1$, puis que $g = f$ et $R = \frac{\pi}{2}$.

5. $E : (x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$.

   Trouver les solutions DSE, préciser leur intervalle de définition.