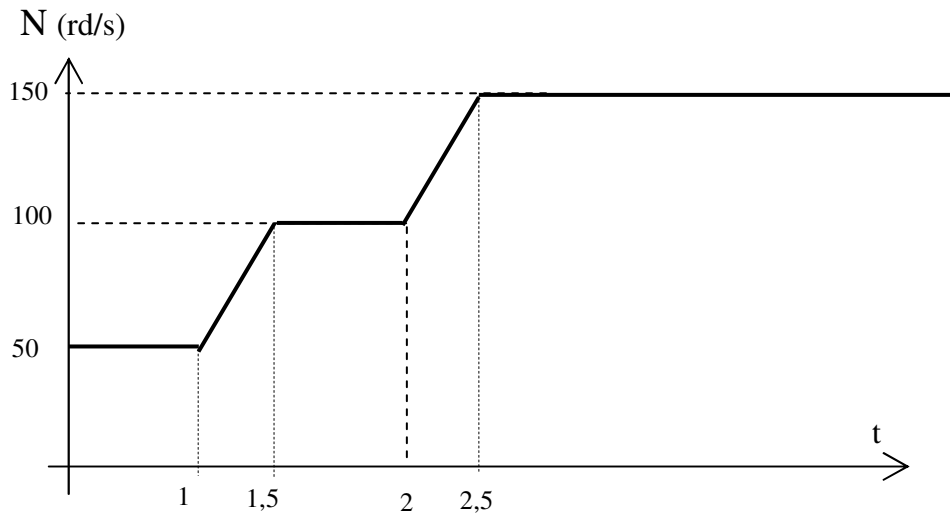
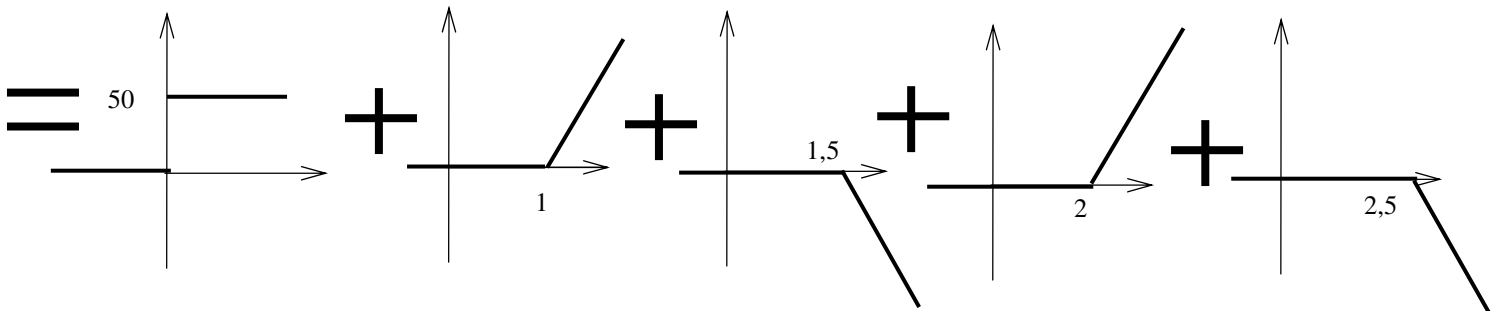


Exercice 1



La vitesse d'un moteur doit suivre l'évolution ci-dessus : déterminer $\mathcal{L}(N)$



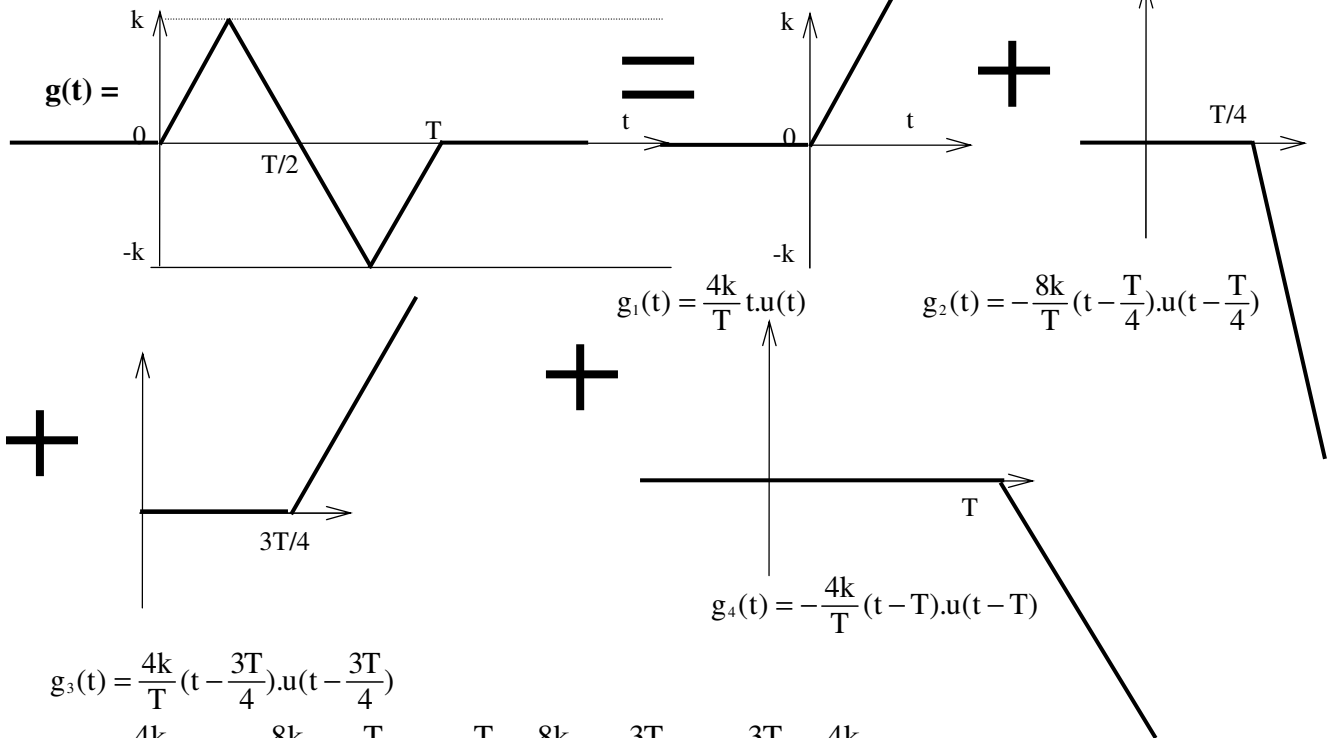
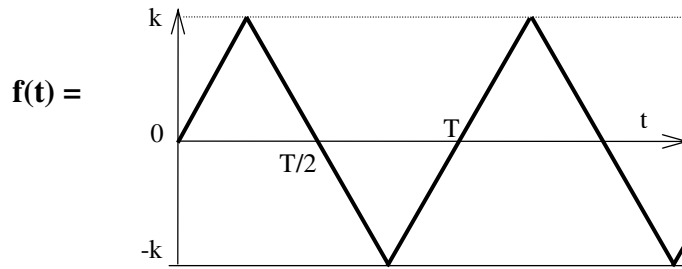
$$n_1(t) = 50u(t); \quad n_2(t) = 100(t-1)u(t-1); \quad n_3(t) = -100(t-1,5)u(t-1,5);$$

$$n_4(t) = 100(t-2)u(t-2) \quad n_5(t) = -100(t-2,5)u(t-2,5)$$

$$\mathcal{L}(n(t)) = N(p) = \frac{50}{p} + \frac{100e^{-1p}}{p^2} - \frac{100e^{-1,5p}}{p^2} + \frac{100e^{-2p}}{p^2} - \frac{100e^{-2,5p}}{p^2} = \frac{50}{p} \left(1 + \frac{2e^{-1p}}{p} - \frac{2e^{-1,5p}}{p} + \frac{2e^{-2p}}{p} - \frac{2e^{-2,5p}}{p} \right)$$

Exercice 2 :

Rechercher la transformée de Laplace des signaux (d'une durée infinie) suivant :



$$g_3(t) = \frac{4k}{T} (t - \frac{3T}{4}) \cdot u(t - \frac{3T}{4})$$

$$g(t) = \frac{4k}{T} t \cdot u(t) - \frac{8k}{T} (t - \frac{T}{4}) \cdot u(t - \frac{T}{4}) + \frac{8k}{T} (t - \frac{3T}{4}) \cdot u(t - \frac{3T}{4}) - \frac{4k}{T} (t - T) \cdot u(t - T)$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{4k}{Tp^2} - \frac{8ke^{-\frac{T}{4}p}}{Tp^2} + \frac{8ke^{-\frac{3T}{4}p}}{Tp^2} - \frac{4ke^{-Tp}}{Tp^2} = \frac{4k}{Tp^2} (1 - 2e^{-\frac{T}{4}p} + 2e^{-\frac{3T}{4}p} - e^{-Tp})$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{4k}{Tp^2} (1 - 2e^{-\frac{T}{4}p} + 2e^{-\frac{3T}{4}p} - e^{-Tp}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTp} = \frac{4k}{Tp^2} (1 - 2e^{-\frac{T}{4}p} + 2e^{-\frac{3T}{4}p} - e^{-Tp}) \frac{1}{1 - e^{-Tp}}$$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation différentielle : $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 6tu(t)$ avec $y(0) = 2$ et $\dot{y}(0) = 2$

Théorème des dérivées 1^{ère} et 2^{ème} :

$$L[y''] = p^2 Y(p) - 2p - 2 ; L[y'] = pY(p) - 2$$

$$D'où : Y(p) [p^2 + 4p + 3] - 2p - 10 = \frac{6}{p^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{2p^3 + 10p^2 + 6}{p^2(p+1)(p+3)}$$

$$\text{Décomposition en éléments simple : } Y(p) = \frac{2p^3 + 10p^2 + 6}{p^2(p+1)(p+3)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{(p+1)} + \frac{d}{(p+3)}$$

$$\times p^2 \text{ puis } p = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\times p \text{ puis } p \rightarrow \infty \Rightarrow b + c + d = 2$$

$$\times (p+1) \text{ puis } p = -1 \Rightarrow c = 7$$

$$\times (p+3) \text{ puis } p = -3 \Rightarrow d = -7/3 \Rightarrow b = -8/3$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{2p^3 + 10p^2 + 6}{p^2(p+1)(p+3)} = \frac{2}{p^2} - \frac{8}{3p} + \frac{7}{(p+1)} - \frac{7}{3(p+3)} \Rightarrow y(t) = \left[2t - \frac{8}{3} + 7e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-3t} \right]$$

Exercice 4 : $F(p) = \frac{p^3 + 5p + 2}{p^2(p+2)(p^2+4)}$

-a- Décomposition éléments simples : $F(p) = \frac{p^3 + 5p + 2}{p^2(p+2)(p^2+4)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+2} + \frac{dp+e}{p^2+4}$

$$\times p^2 \text{ puis } p = 0 \Rightarrow a = 1/4$$

$$\times p \text{ puis } p \rightarrow \infty \Rightarrow b + c + d = 0$$

$$\times (p+2) \text{ puis } p = -2 \Rightarrow c = -1/2 \Rightarrow b = 0,5 - d$$

$$\frac{p^3 + 5p + 2}{p^2(p+2)(p^2+4)} = \frac{0,25}{p^2} + \frac{0,5-d}{p} - \frac{0,5}{p+2} - \frac{dp+e}{p^2+4}$$

$$= \frac{0,25(p+2)(p^2+4) + (0,5-d)p(p+2)(p^2+4) - 0,5p^2(p^2+4) - (dp+e)p^2(p+2)}{p^2(p+2)(p^2+4)}$$

$$= \frac{0,25p^3 + p + 0,5p^2 + 2 + 0,5p^4 + 2p^2 + p^3 + 4p - dp^4 - 4dp^2 - 2dp^3 - 8dp - 0,5p^4 + 2p^2 - dp^4 - 2dp^3 - ep^3 + 2ep^2}{p^2(p+2)(p^2+4)}$$

$$= \frac{-2dp^4 + p^3(1,25 - 2d - e - 2d) + p^2(4,5 - 4d + 2e) + p(5 - 8d) + 4}{p^2(p+2)(p^2+4)} \quad \text{donc } d = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p^3 + 5p + 2}{p^2(p+2)(p^2+4)} = \frac{p^3(1,25 - e) + p^2(4,5 + 2e) + 5p + 2}{p^2(p+2)(p^2+4)} \Rightarrow e = 0,25$$

$$\Rightarrow \frac{p^3 + 5p + 2}{p^2(p+2)(p^2+4)} = \frac{0,25}{p^2} + \frac{0,5}{p} - \frac{0,5}{p+2} - \frac{0,25}{p^2+4} = \frac{0,25}{p^2} + \frac{0,5}{p} - \frac{0,5}{p+2} - \frac{1}{8} \frac{2}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow s(t) = [0,25t + 0,5 - 0,5e^{-2t} + 0,125 \sin 2t]$$

Même décomposition mais en utilisant les valeurs des pôles complexes :

attention en physique et en SI $\sqrt{-1} = j$ et non pas i pour éviter la confusion avec l'intensité.

A et c restent identiques

$\times(p^2+4)$ puis $p = -2j$

$$\Rightarrow -2jd + e = \frac{(-2j)^3 - 10j + 2}{(-2j)^2(-2j + 2)} = \frac{8j - 10j + 2}{-4(-2j + 2)} \Rightarrow -2jd + e = \frac{-2j + 2}{8j - 8} = \frac{1}{4} \frac{1-j}{j-1} = -\frac{1}{4} \quad (1)$$

$\times(p^2+4)$ puis $p = 2j$

$$\Rightarrow 2jd + e = \frac{(2j)^3 + 10j + 2}{(2j)^2(2j + 2)} = \frac{-8j + 10j + 2}{-8(j + 1)} \Rightarrow 2jd + e = \frac{2j + 2}{-8(j + 1)} = -\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2e = -\frac{1}{2} \Rightarrow e = -\frac{1}{4} \Rightarrow d = 0 \Rightarrow b = 1/2$$

$$\frac{p^3 + 5p + 2}{p^2(p+2)(p^2+4)} = \frac{1}{4} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{p^2+4} \text{ Identique au résultat précédent...}$$