**PC RESUME : Equations différentielles linéaires**

## I) Généralités

Ces équations ont en général un second membre de sorte que les **solutions sont données par** $\boxed{u_s(t) = u_{homogène}(t) + u_{particulière}(t)}$ où

- $u_{homogène}(t)$ est la solution de l'équation homogène (sans second membre)
- $u_{particulière}(t)$ une solution particulière de l'équation complète.

C'est à la solution complète $u_s(t) = u_{homogène}(t) + u_{particulière}(t)$ **qu'on applique les conditions initiales (C.I).**

## II) Equations différentielles linéaires du premier ordre

### 1°) Forme générale

$\boxed{u_e(t) = u_s(t) + a\frac{du_s}{dt}}$ où a est réel. $u_{homogène}(t) = Ae^{-at}$

- si a < 0 elle diverge ( tend vers l'infini)
- si a >0 on pose $\tau = \frac{1}{a}$ constante de temps caractéristique du phénomène

### 2°) Régime forcé continu

$u_e(t) = E$ (en électricité on parle d'un échelon de tension) alors $u_{particulière}(t) = cste$. On vérifie que $u_{particulière}(t) = E$ convient. D'où la solution : $u_S(t) = Ae^{-at} + E$
A est donnée par les C.I.

### 3°) Régime forcé sinusoïdal

## III) Equation différentielle du second ordre

L'équation différentielle type est celle donnant la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série. Avec Q coefficient de qualité et $\omega_o$ pulsation propre

$\boxed{u_e(t) = u_s(t) + \frac{1}{Q\omega_o}\frac{du_s}{dt} + (\frac{1}{\omega_o{}^2})\frac{d^2u_s}{dt^2}}$ **( E) ou** $\boxed{u'_e(t) = \omega_o{}^2 u_s(t) + \frac{\omega_o}{Q}\frac{du_s}{dt} + \frac{d^2u_s}{dt^2}}$

Le terme en dérivée première est dit <u>terme d'amortissement</u>. On introduit aussi $\boxed{m = \frac{1}{2.Q}}$ noté aussi σ appelé coefficient d'amortissement du système.

## II) Régime libre : $u_e(t) = 0$

Il correspond à un oscillateur **amorti** sans contrainte donc à une équation sans second membre
L'allure des solutions est donné par l'étude du discriminant de l'équation caractéristique. On introduit $\omega = \omega_o\sqrt{|1 - \mathbf{m}^2|} = \omega_o\sqrt{|1 - (1/2\mathbf{Q})^2|}$ la pseudo-pulsation.

### 1°) Solution pseudo-périodique si Δ <0 soit Q > 1/2 (l'amortissement est faible).

$$\mathbf{u_s(t) = e^{-\frac{1}{2Q}\omega_o t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}$$

**<u>2°) Solution apériodique</u> si $\Delta$ >0 soit Q < 1/2 (l'amortissement est fort).**

$$\mathbf{u_s(t) = e^{-\frac{1}{2Q}\omega_o t}(Ach\omega t + Bsh\omega t)}$$ (ou préférable) $$\mathbf{u_s(t) = e^{-\frac{1}{2Q}\omega_o t}(A'e^{\omega t} + B'e^{-\omega t})}$$

**<u>3°) Solution apériodique critique</u> si $\Delta$ = 0 soit Q =1/2** $\mathbf{u_s(t) = e^{-\omega_o t}(A + Bt)}$

Rem: les coefficients introduits dépendent de conditions initiales (C.I). Toutes ces fonctions tendent vers zéro. Cela traduit la stabilité des systèmes physiques associés.

**<u>III) Regime quelconque</u>** Les solutions **<u>de l'équation ( E)</u>** sont données par $\boxed{u_s(t) = u_{\text{hom}\,ogène}(t) + u_{particulière}(t)}$ où la solution homogène est celle de l'équation sans second membre décrite au II) qui **tend vers zéro**. L'allure de la solution dépend donc **de $u_e(t)$** et bien sûr **des conditions initiales.**

**<u>IV) Réponse indicielle : $u_e(t)$ = E</u>**

La **réponse à un échelon**, appelée réponse indicielle, modélise une excitation dont le temps d'établissement est négligeable devant les temps caractéristiques du système. En électricité cela correspond à appliquer, instantanément, une tension continue E à l'entrée du quadripôle.
**Un régime continu s'établit correspondant à $u_{particulière}$= cste.**

**<u>V) Régime sinusoïdal forcé :</u>** On force un régime sinusoïdal grâce à **$u_e(t)$ = Vmax.sin($\omega$t)** .

L'usage des complexes est commode. La fonction de transfert correspondant à l'équation différentielle est alors avec x = $\omega/\omega_0$: $\boxed{\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{jx}) = \dfrac{1}{1 + \mathbf{j}\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{Q}} + \mathbf{j}^2\mathbf{x}^2}}$

L'allure du gain en fonction de la pulsation dépend de la valeur du coefficient de qualité Q.

$$\boxed{u_e(t) = u_s(t) + \frac{1}{Q\omega_o}\frac{du_s}{dt} + \left(\frac{1}{{\omega_o}^2}\right)\frac{d^2u_s}{dt^2}}$$