Bien préparer la rentrée en ECE1
Mathématiques

David Meneu

Avant-propos

À la suite de la présentation faite dans les conseils de rentrée, vous trouverez ci-dessous un certain nombre de rappels de cours et d'exercices d'application des notions concernées. Le but est de faire sérieusement le point sur les chapitres des programmes de lycée dont le cours de l'an prochain sera le prolongement.
Il s'agit aussi de s'entraîner à traiter les exercices **sans calculatrice** pour se mettre dans l'esprit de ce qui vous sera demandé dès le premier devoir de l'année, qui aura lieu fin septembre.
Malgré les apparences, le nombre d'exercices proposés ici reste assez limité (!) et porte exclusivement sur les prérequis du lycée ; il est conseillé de poursuivre l'entraînement sur des énoncés du même type qu'on trouvera facilement sur la toile.

N'hésitez pas à me contacter pendant l'été : **meneudavid@yahoo.fr** si vous avez des questions ! Notamment en ce qui concerne les corrigés des exercices, qui malgré toutes mes vérifications contiennent certainement d'inévitables fautes de frappe.

Introduction

les mathématiques du supérieur : rigueur et précision

Pour commencer, voici une petite introduction à l'esprit dans lequel nous allons travailler ensemble les mathématiques, à partir d'un exemple emblématique.

Avant de lire ce qui suit, prenez 5 minutes pour répondre à la question suivante :

définir ce qu'est une fonction croissante.

Voici un "énoncé" :

La fonction $f(x)$ est croissante si $f'(x) \geqslant 0$.

Cet énoncé n'a aucun sens...et son statut n'est pas clair : est-ce une définition, un théorème ?

▶ Pourquoi cet énoncé n'a aucun sens.

En mathématiques, les objets doivent être convenablement introduits et définis. Dans l'affirmation ci-dessus, qui est x ? Sans doute un réel ? Qui est $f(x)$? Une formule ? Un autre réel ? Mais au fait, c'est quoi une fonction ?

Soyons plus précis : pour un bachelier ES (ou S...), une fonction f (et non $f(x)$! !) possède un ensemble de définition qui est en général une partie A de $\mathbb{R}$ et associe, à chaque élément x de l'ensemble A, un réel que l'on note $f(x)$.

Tout ceci est résumé de la façon suivante : on dit que f est définie sur A et est à valeurs réelles.

L'énoncé ci-dessus commencera donc ainsi :

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A et à valeurs réelles.

L'énoncé ci-dessus s'intéresse aux fonctions croissantes. Qu'est ce donc qu'une fonction croissante ? Ce n'est pas une fonction dont la dérivée est positive...

La définition correcte est la suivante :

Définition

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A et à valeurs réelles.

On dit que la fonction f est croissante sur A si :

$$\textit{pour tous } x \textit{ et } y \textit{ éléments de } A, \quad x \leqslant y \quad \textit{implique} \quad f(x) \leqslant f(y).$$

Ainsi, la fonction "racine carrée", définie sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, est croissante sur $\mathbb{R}^+$...sans que l'on ne puisse dériver cette fonction sur tout $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$: cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Notre tout premier "énoncé" n'est donc pas une définition...c'est peut-être un (embryon de) théorème ?

Un théorème...faux.

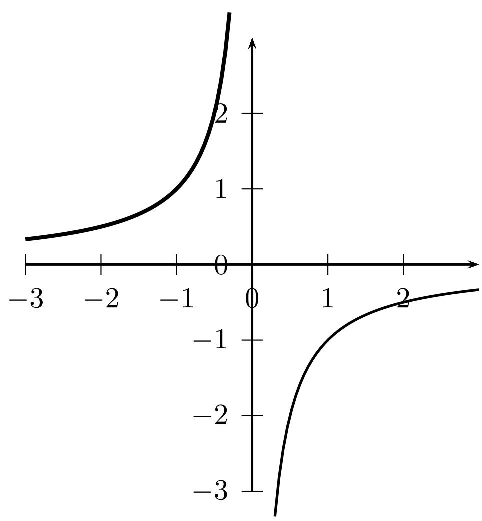
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A et à valeurs réelles.

Supposons *que la fonction f est dérivable sur A et que pour tout élément*

x de A, $\quad f'(x) \geqslant 0$.

Alors *la fonction f est croissante sur A.*

Ce théorème est faux : considérons $A = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et f la fonction définie par $f(x) = -1/x$ pour tout x appartenant à A. Cette fonction f est dérivable sur A et pour tout x élément de A, on a $f'(x) = 1/x^2 \geqslant 0$. Cette fonction vérifie donc les hypothèses du "théorème" et pourtant, $f(-1) > f(1)$ alors que $-1 \leqslant 1$...la fonction f n'est donc pas croissante sur A.



Voici un vrai théorème.

Théorème.
Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs réelles.

Supposons *que la fonction f est dérivable sur $[a, b]$ et que pour tout élément x de $[a, b]$, $\quad f'(x) \geqslant 0$.*

Alors *la fonction f est croissante sur $[a, b]$.*

La différence entre ce vrai théorème et l'énoncé faux qui le précède réside dans le fait qu'un domaine de définition de la forme $[a, b]$ est un intervalle, alors que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Vous voyez que ce théorème (dont la preuve n'est pas évidente et vous sera faite en cours de mathématiques l'an prochain) a été construit progressivement, à partir d'un vague énoncé faux...qui vous semblait peut-être plus clair et presque évident...Ce théorème a des hypothèses précises (forme du domaine de définition de f, dérivabilité de f et signe de la dérivée)...toutes indispensables alors que seule l'hypothèse
$f'(x) \geqslant 0$ vous semble peut-être essentielle !

Faire des mathématiques dans l'enseignement supérieur, c'est adopter la démarche rigoureuse qui montre clairement la différence entre un vague énoncé plus ou moins juste...et donc complètement faux...et un vrai théorème, que l'on utilisera après en avoir vérifié les hypothèses.

Cette petite introduction vous a parue bien compliquée ? Pas de panique, nous avons toute l'année qui vient pour mettre en place les bonnes pratiques, et finalement donner sens à beaucoup de résultats souvent - et malheureusement - admis dans les programmes du lycée.

En attendant, les points développés ci-dessous sont destinés à vous aider à commencer l'évolution que va forcément connaître votre façon d'aborder les mathématiques en prépa !

Table des matières

Chapitre 1

Rappels indispensables de calcul

Rappels : Ensembles, Appartenance, Inclusion

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres **entiers naturels**, c'est-à-dire :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}.$$
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres **entiers relatifs**, il est composé des entiers naturels et de leurs opposés.
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres **rationnels**, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers relatifs (sachant qu'on ne divise jamais par 0...). Cet ensemble contient $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
Par exemple : $\dfrac{2019}{2020}$. Par contre, $\sqrt{2}$ ou $\dfrac{\ln(3)}{5}$ ne sont pas des nombres rationnels.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres **réels**, ce sont tous les nombres que vous avez rencontrés au cours de votre scolarité.
Par exemple : $1945,\ -13,\ \dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \pi,\ e^6,\ \ln(2)$, etc...

On notera $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls. Ainsi, $\mathbb{R}^{+*}$ représente l'ensemble des réels *strictement* positifs.

- lorsque x désigne (pour l'instant) un nombre, et E un ensemble, on notera :
$x \in E$ si le nombre x **appartient** à l'ensemble E, et $x \notin E$ si x n'appartient pas à l'ensemble E.
Ainsi : $4 \in \mathbb{N},\ 4 \in \mathbb{Z},\ 4 \in \mathbb{Q}\ (4 = \frac{4}{1}),\ 4 \in \mathbb{R}\ -11 \in \mathbb{Z},\ -11 \notin \mathbb{N}$,
$\dfrac{12}{35} \in \mathbb{Q},\ \pi \in \mathbb{R},\ \pi \notin \mathbb{Q}$ (on dit que π est un nombre *irrationnel*).
- Si A et B sont deux ensembles, on notera : $A \subset B$ si l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B, c'est-à-dire si *tous* les éléments de A appartiennent aussi à l'ensemble B (la réciproque n'étant pas forcément vraie !).
Ainsi : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q},\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (et de fait, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q},\ \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, etc...).

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni d'une opération d'addition (notée $+$) et d'une opération de multiplication (notée $\times$ ou .), vérifiant les propriétés élémentaires suivantes :

La base !

Les lettres a, b, c désignant des nombres réels,

- $a+b = b+a$, et $a+(b+c) = (a+b)+c$ (l'addition est *commutative* et *associative*)
- $0 + a = a + 0 = a$, et il existe un seul réel, noté $-a$ et appelé *opposé* de a, qui vérifie : $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- La multiplication est aussi commutative et associative, et $1 \times a = a \times 1 = a$ (on dit que 1 est l'*élément neutre* pour la multiplication).
- Si a est un réel non nul, il existe un unique réel b tel que $a \times b = b \times a = 1$: b est l'*inverse* de a, et se note $b = \dfrac{1}{a}$.
- $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$: on parle de *distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition.
- Les opérations de soustraction et de division sont issues des propriétés ci-dessus :

Par définition, $a - b = a + (-b) = (-b) + a$ et si $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b} \times a$.

- **Règle du produit nul** :

$$\boxed{a \times b = 0 \iff a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

- Règle de simplification par un réel non nul :

si $a \in \mathbb{R}^*$, alors : $a \times b = a \times c \iff b = c$.

- **Identités remarquables** : il y en a 3, à savoir reconnaître et utiliser dans un sens ou dans l'autre !

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

$\to$ **Une révision indispensable** : la réduction au même dénominateur dans les calculs avec des fractions !

I Puissances - Racines

Les règles de calcul avec les puissances sont, statistiquement, celles qui sont les moins maîtrisées par les étudiants qui arrivent de Terminale : des lacunes dans ce domaine risquent de vous poursuivre jusqu'à la fin de la deuxième année de ECE ! Prenez donc soin, le plus vite possible d'apprendre **par coeur** toutes ces formules, et surtout entraînez-vous à les appliquer !

Puissances entières

- Soit a un réel non nul, on définit les puissances entières successives de a :

$$a^0 = 1 \text{ par convention, } a^1 = a,\ a^2 = a \times a,\ a^3 = a \times a \times a,\ \cdots$$

Si n est un entier naturel, $\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs } a}}$.

- Par convention, $0^0 = 1$, mais si $n \in \mathbb{N}^*$: $0^n = 0$.
- Si a, b sont des réels, et n, p des entiers naturels ou relatifs :

$$\boxed{a^n \times a^p = a^{n+p}},\quad \boxed{(a^n)^p = a^{n \times p}},\quad \boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$$

- Si b est non nul :

$$\boxed{b^{-n} = \frac{1}{b^n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n},\quad \boxed{\frac{b^n}{b^p} = b^{n-p}},\quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Racine carrée

Tout réel strictement positif $a \in \mathbb{R}^{+*}$, possède exactement deux **racines carrées** opposées, solutions de l'équation : $x^2 = a$ d'inconnue x.

→ Le réel noté $\boxed{\sqrt{a}}$ est toujours la racine carrée **positive** de a
(l'autre solution de l'équation $x^2 = a$ est donc $-\sqrt{a}$).

- Le réel 0 n'a qu'une seule racine carrée : $\sqrt{0} = 0$.
- L'égalité $b = \sqrt{a}$ est donc vraie *si et seulement si* a et b sont positifs, et $b^2 = a$.
- Pour tout réel positif a : $(\sqrt{a})^2 = a$, ce qui justifie la notation courante : $\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$

  Attention ! Si a est un réel : $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}$. Ainsi : $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ (valeur absolue).

- Pour tous réels a, b strictement positifs : $\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$ et $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$

Exercice 1 [Développement, réduction] (Solution)

1. Développer et réduire les expressions suivantes :
   - $A = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$
   - $B = (a+2b)(2a+b) - (a-2b)(2a-b)$
   - $C = 3(x+h)^2 - 4(x+h) - (3x^2 - 4x)$
   - $D = (x+y+z)^2$
   - $E = (2x+3)^4$
   - $F = (a+b)^3$
   - $G = (a-b)^3$
   - $H = (2x-3)^3$
   - $I = (3x + \frac{1}{2})^3 - (6x+1)^2 + (x + \frac{1}{6})$
   - $J = (2x - \frac{6}{5})(x+2) - (x + \frac{1}{5})(x-3) + 2x(\frac{1}{10} - x)$
2. Factoriser les expressions suivantes :
   - $A = (2y+4)^2 - y^2$
   - $B = 3x^4(x+1)^2 + 4x^3(x+1)^3$
   - $C = 2x^2 - 12x + 18$
   - $D = 4y^2 - 36$
   - $E = -x^2 + x + 6$
   - $F = (2x-6)(x+2) - (x+1)(x-3) + 2x(3-x)$
   - $G = (3x + \frac{1}{2})^3 - (6x+1)^2 + (x + \frac{1}{6})$
   - $H = a^3 + 3a^2 - 4a - 12$
3. Développer et réduire $(a-b)(a^2+ab+b^2)$. En déduire une factorisation de $8x^3 - 27$.

Exercice 2 [Simplifications d'expressions et de fractions] (Solution)

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

- $\frac{2}{\sqrt{2}} = \cdots$
- $(\sqrt{a})^2 = \cdots$
- $\frac{(2/3)^3}{4/9} = \cdots$
- $\frac{2/n^4}{4/n} = \cdots$
- $\frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100} = \cdots$
- $\frac{t^3 + 3t^2}{t^3 - 9t} = \cdots$
- $(\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \cdots$
- $\frac{3 - 2\sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} = \cdots$ (écrire sous la forme $a + b\sqrt{5}$)
- $\left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}\right)^2 = \cdots$

Exercice 3 [Réduction au même dénominateur] (Solution)
Réduire au même dénominateur les expressions suivantes ; on prendra soin de choisir à chaque fois le plus petit dénominateur commun (et donc, le plus efficace !)

- $\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{15} =$
- $\dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{16} + \dfrac{4}{9} =$
- $\dfrac{2}{3n} - \dfrac{5}{n^2} =$
- $\dfrac{x+4}{x-5} + \dfrac{3}{5-x} =$
- $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x} =$
- $\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} =$
- $\dfrac{6}{x^2-3x} - \dfrac{4}{x^2-2x} =$
- $\dfrac{2x+1}{2x+4} - \dfrac{3x^2}{(x+2)^2} =$
- $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x^2-9} =$

Exercice 4 [Réductions d'expressions rationnelles] (Solution)
Simplifier au maximum les expressions fractionnaires suivantes : la réponse finale doit prendre la forme d'une seule fraction dans laquelle on ne trouve plus de facteur commun entre le numérateur et le dénominateur.

1. $\dfrac{\dfrac{2}{x+h} - \dfrac{2}{x}}{h} =$
2. $\dfrac{3x}{3x^2-12x} + \dfrac{1}{6x} =$
3. $\dfrac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b} + 2 + \dfrac{b}{a}} =$
4. $\dfrac{u - \dfrac{1}{u}}{1 - \dfrac{1}{u^2}} =$
5. $\dfrac{\dfrac{4}{y} - y}{\dfrac{2}{y^2} - \dfrac{1}{2}} =$
6. $\dfrac{2}{5b} - \dfrac{4}{3a^2} - \dfrac{1}{6a^2b^2} =$
7. $\dfrac{y-2}{y^2-4y+4} \div \dfrac{y^2+2y}{y^2+4y+4} =$
8. $\dfrac{m-1}{m^2-4m+4} + \dfrac{m+3}{m^2-4} + \dfrac{2}{2-m} =$
9. $\dfrac{1 - \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}}{1 - \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{y}}} =$
10. $\left(x - \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\right) \div \left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{1-x}\right) =$

Exercice 5 [Calculs avec les puissances] (Solution)

Simplifier au maximum les expressions suivantes ; les réponses ne comporteront que des exposants positifs.

- $3x^2(xy^2)^5 =$
- $\dfrac{(2xy^2)^3}{4x^4y^4} =$
- $(a^4b^{-6})^{3/2} =$
- $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{ab^{-2}-ba^{-2}} =$
- $\dfrac{a^{-4}b^3a^3}{(ab^2)^{-2}} =$
- $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-1}}+\dfrac{b^{-2}}{a^{-1}}\right)^{-1} =$
- $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{-4}\left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)^{-3} =$
- $3\times 2^{7n+1}\times 2^{n+3}\times 3^{n-1} =$
- $\dfrac{(-2)^{2k-1}}{3^{4k+1}} = \cdots \left(\dfrac{\cdot}{\cdot}\right)^k$
- $\dfrac{a^4\times\dfrac{(b^3a)^{-2}}{a^6b^3}}{(a^7b^{-5})^4\times\dfrac{a^{-3}b^8}{a^5b^{10}}} =$

II Inégalités

Soient a, b, c, d des nombres réels. L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre qui permet toujours de comparer deux réels, selon les règles suivantes :

Règles de calcul avec les inégalités

On dira que : $a \leqslant b$ si $b - a$ est un réel positif.
Comparer deux réels revient souvent à étudier le **signe de leur différence**.

L'égalité peut provenir d'une **double inégalité** :
$a = b \iff (a \leqslant b$ **et** $b \leqslant a)$.

Transitivité de l'inégalité :
$(a \leqslant b$ et $b \leqslant c) \implies a \leqslant c$

Addition d'un même réel dans les deux membres :
$a \leqslant b \implies (\forall c \in \mathbb{R}, \quad a + c \leqslant b + c)$

Somme membre à membre de deux inégalités :
$(a \leqslant b$ et $c \leqslant d) \implies (a + c \leqslant b + d)$.

Produit des deux membres par un même réel positif :
$a \leqslant b \implies (\forall c > 0, \quad a \times c \leqslant b \times c)$.
$\rightarrow$ Que se passe-t-il sinon (c **négatif**) ?

Produit membre à membre de deux inégalités entre réels positifs :
$(0 \leqslant a \leqslant b$ **et** $0 \leqslant c \leqslant d) \implies (a \times c \leqslant b \times d)$.

Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés :

$$(0 \leqslant a \leqslant b) \iff (a^2 \leqslant b^2)$$

$\rightarrow$ Et si a et b sont tous les deux négatifs ?

Passage à l'inverse ; si a et b sont de même signe :

$$a \leqslant b \iff \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}.$$

$\rightarrow$ Preuve ? Que se passe-t-il si a et b sont de signes opposés ?

Il y a deux opérations qu'on s'interdira avec les inégalités :
- La soustraction membre à membre de deux inégalités
- La division membre à membre de deux inégalités

Pour la bonne et simple raison que le résultat imaginé est alors faux à 99,9% ! !

Rappels des règles de signes :

signe de a	signe de b	signe de $a+b$	signe de $a-b$	signe de $a \times b$	signe de $\dfrac{a}{b}$
+	+	+	? ?	+	+
+	-	? ?	+	-	-
-	+	? ?	-	-	-
-	-	-	? ?	+	+

Justification des règles sur les inégalités :

La définition initiale sert pour toutes les démonstrations ; soient a, b, c, d quatres réels quelconques :

- **Si** $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, **alors** $a - b$ est à la fois positif et négatif : seul le réel zéro vérifie cette propriété,

  donc : $a - b = 0 \iff a = b$.
- **Si** a $\leqslant b$ et $b \leqslant c$, **alors** : $\underbrace{(b-a)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(c-b)}_{\geqslant 0} = c - a \geqslant 0$ (somme de deux réels positifs), **donc** $a \leqslant c$.
- **Si** $a \leqslant b$, **alors** pour tout réel c : $(b + c) - (a + c) = b - a \geqslant 0$

  donc $a + c \leqslant b + c$.
- **Si** $a \leqslant b$ **et** $c \leqslant d$, **alors** : $(b + d) - (a + c) = \underbrace{(b-a)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(d-c)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

  donc $a + c \leqslant b + d$
- **Si** a $\leqslant b$ **et si** $c > 0$, alors $b \times c - a \times c = \underbrace{(b-a)}_{\geqslant 0} \times \underbrace{c}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

  donc : $a \times c \leqslant b \times c$.

  $\rightarrow$ Adapter la preuve au cas où $c < 0$.

- Si a, b, c, d sont quatre réels **positifs**, alors :

  $a \leqslant b \overset{c \geqslant 0}{\Longrightarrow} a \times c \leqslant b \times c$ et $c \leqslant d \overset{b \geqslant 0}{\Longrightarrow} b \times c \leqslant b \times d$,

  donc : $ac \leqslant bc \leqslant bd \Longrightarrow ac \leqslant bd$ par *transitivité* de l'inégalité.

- **Si** a et b sont des réels **positifs** : **alors** $b^2 - a^2 = (b - a) \times (b + a)$ où :

  $a \leqslant b \iff b - a \geqslant 0$ et $b + a \geqslant 0$,

  donc par produit : $(b - a) \times (b + a) \geqslant 0 \iff b^2 - a^2 \geqslant 0 \iff a^2 \leqslant b^2$.

$\rightarrow$ Que donne la preuve lorsque a et b sont tous les deux négatifs ?

- **Si** a et b sont deux réels *strictement positifs* tels que $0 < a \leqslant b$:
  alors $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$ après réduction au même dénominateur.
  Ainsi : $a \leqslant b \iff b - a \geqslant 0$ et $b \times a > 0$ par produit de deux réels strictement positifs ;
  ainsi par quotient : $\dfrac{b-a}{ab} \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$,
  ce qui prouve bien l'implication : $0 < a \leqslant b \Longrightarrow \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.
  $\rightarrow$ Traiter de même le cas où a et b sont tous deux négatifs. Et si $a < 0 < b$?

Chapitre 2

Fonctions de référence

I Rappels sur les trinômes du second degré

Définition

On appelle **trinôme du second degré** toute fonction P qui peut être définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a.x^2 + b.x + c$$

où $a,\ b,\ c$ sont des réels fixés avec a **non nul**.

Remarques :

- Cette expression de la fonction P est appelée la forme *développée* du trinôme (*trinôme* : 3 termes).
  Les coefficients $a,\ b,\ c$ sont uniques pour chaque fonction trinôme.

  Les expressions suivantes sont des trinômes du second degré :

  $$x^2 - 6x + 11, \quad 2x^2, \quad 3 + x^2, \quad (x+4)(x-1) = x^2 + 3x - 4$$

- Si a est nul, on ne peut pas parler de fonction du second degré, il s'agira d'une fonction affine.
  Par contre, b et c peuvent éventuellement être nuls.

  Ainsi : $(2x+1) - 3x^2$ est un trinôme du second degré, puisqu'en développant on obtient :

  $$(2x+1)^2 - 3x^2 = 4x^2 + 4x + 1 - 3x^2 = x^2 + 4x + 1$$

  Par contre, l'expression $(x-2)^2 - x^2$ n'est pas un trinôme du second degré car :

  $$(x-2)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 4 - x^2 = -4x + 4$$

I.1 Forme canonique des trinômes du second degré

Forme canonique d'un trinôme

Pour tout trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on peut trouver deux nombres réels α et β tels que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

L'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelée la **forme canonique** du trinôme.

Démonstration :

On transforme le trinôme $ax^2 + bx + c$ en commençant par factoriser par a, ce qui est possible puisque $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Ensuite on écrit que $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$; en effet :

$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}$, d'où : $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$, et :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

On a donc : $\quad ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -a\dfrac{b^2-4ac}{4a^2} = -\dfrac{\Delta}{4a}$

en posant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$: le **discriminant** du trinôme.

Exemples :

- $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$: on a ici utilisé une identité remarquable "complète", et $(x+2)^2$ est la forme canonique du trinôme $x^2 + 4x + 4$.
- Pour mettre le trinôme $3x^2 - 12x + 8$ sous forme canonique :
  1) On commence par factoriser les deux premiers termes par le coefficient de x^2 dans l'expression : $\quad 3x^2 - 12x + 8 = 3(x^2 - 4x) + 8$.
  2) On transforme ensuite $x^2 - 4x$ en faisant apparaître le début d'une identité remarquable :
  $$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$
  3) On obtient alors :
  $$3x^2 - 12x + 8 = 3(x^2 - 4x) + 8 = 3\left[(x-2)^2 - 4\right] + 8 = 3(x-2)^2 - 12 + 8 = 3(x-2)^2 - 4$$
  et $3(x-2)^2 - 4$ est donc la forme canonique de $3x^2 - 12x + 8$.

I.2 Résolution de l'équation du second degré

Considérons l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
On a vu que le trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

On en déduit :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \iff a(x-\alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a} \iff (x-\alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Trois cas se présentent alors :

1. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$: comme $4a^2 > 0$, alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$ et l'équation $(x-\alpha)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ n'a pas de solution car un carré est toujours positif ou nul. L'équation de départ $ax^2 + bx + c = 0$ n'a donc **aucune** solution non plus.

2. $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ alors : $(x-\alpha)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2} \iff (x-\alpha)^2 = 0 \iff x - \alpha = 0 \iff x = \alpha$,

et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a pour **unique** solution le réel $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$.

3. $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$: comme $4a^2 > 0$, alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et :

$$\begin{aligned}
(x-\alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} &\iff x - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x - \alpha = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\iff x = \alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\iff \boxed{x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}
\end{aligned}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a donc **deux solutions distinctes** données par les formules ci-dessus.

Remarque : Pour résoudre une équation du second degré "incomplète", c'est-à-dire une équation dans laquelle il manque le terme du premier degré ou le terme constant (en clair : si $b = 0$ ou $c = 0$), il n'est pas nécessaire d'utiliser les formules générales et le discriminant, on sait résoudre ces équations directement !

Exemples : l'équation $2x^2 + 3x = 0$ se résout en factorisant par x :

$$2x^2 + 3x = 0 \iff x(2x+3) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0) \iff (x = 0 \text{ ou } x = -\frac{3}{2})$$

Les deux solutions de l'équation sont donc 0 et $-\dfrac{3}{2}$; on a utilisé la **règle du produit nul**.

Pour résoudre l'équation $4x^2 - 18 = 0$: il suffit d'isoler x^2, et

$$4x^2 - 18 = 0 \iff x^2 = \frac{9}{2} \iff (x = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{3}{\sqrt{2}})$$

L'équation possède deux solutions, qui s'écrivent aussi : $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

I.3 Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$:

Théorème de factorisation des trinômes

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Si Δ est positif ou nul, le trinôme se factorise de la façon suivante :

- Si $\Delta > 0$, $\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad$ où x_1 et x_2 sont les deux racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, $\quad ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - \alpha)^2$.

Exemples :

- Soit $P(x) = 2x^2 + 4x - 6$, pour lequel : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64 > 0$. Le trinôme admet donc les deux racines : $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 2} = \dfrac{-4 + 8}{4} = 1$ et $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - 8}{4} = -3$, et on vérifie bien que :
$$2(x - 1)(x + 3) = 2(x^2 + 3x - x - 3) = 2x^2 + 4x - 6 = P(x)$$
- Soit $Q(x) = 4x^2 + 20x + 25$, pour lequel : $\Delta = 20^2 - 4 \times 4 \times 25 = 400 - 400 = 0$, et le trinôme a pour unique racine $\alpha = -\dfrac{20}{2 \times 4} = -\dfrac{5}{2}$; on a bien :
$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) = 4x^2 + 20x + 25$$

I.4 Variations et représentation graphique

Courbe d'une fonction trinôme du second degré

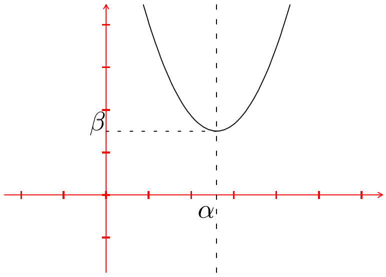
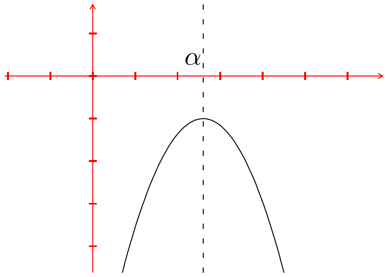
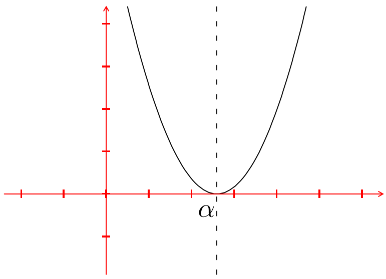
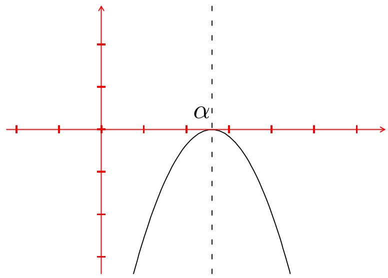
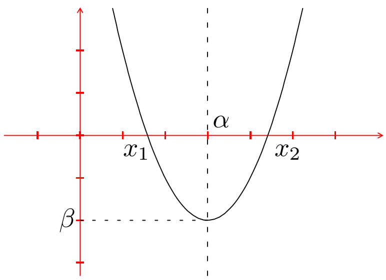
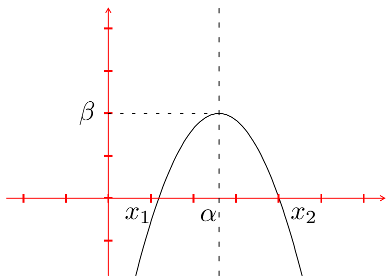
La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré P définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées (α, β) avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Éléments de justification : Au vu de ce qui précède, on peut écrire $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

À partir de la parabole représentant la fonction carrée $x \mapsto x^2$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut obtenir la courbe représentant la fonction $x \mapsto (x - \alpha)^2$ par translation de vecteur colinéaire à $\vec{i}$.
Ensuite on obtient la courbe représentative de la fonction $x \mapsto a(x - \alpha)^2$ en multipliant point par point les ordonnées des points de la courbe précédente par a. Si $a > 0$ la nouvelle parabole est orientée dans le même sens, si $a < 0$, la courbe est "renversée".
Enfin, on obtient la courbe représentative de la fonction P par translation de vecteur colinéaire à $\vec{j}$ (ajout de β à toutes les images).

Selon que le trinôme $ax^2 + bx + c$ possède 0, 1 ou 2 racines, la parabole qui le représente

coupe ou non l'axe des abscisses.
Il y a six allures possibles pour la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ suivant les signes de a et du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

	$a > 0$: la parabole est tournée "vers le haut"	$a < 0$: la parabole est tournée "vers le bas"
$\Delta < 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de racine		
$\Delta = 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule racine (et $\beta = 0$)		
$\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines distinctes x_1 et x_2		
Variations	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline \text{Var } P & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & \beta & & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline & & & \beta & & \\ \text{Var } P & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$

Le sens de variation d'une fonction polynôme du second degré se déduit de celui de la fonction de référence $x \mapsto x^2$ via la forme canonique $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
On peut aussi, bien sûr, refaire l'étude du signe de sa dérivée $P'(x) = 2ax + b$.

I.5 Signe d'un trinôme du second degré :

Le signe du trinôme $P(x) = ax^2+bx+c$ dépend lui aussi du discriminant $\Delta = b^2-4ac$:

- Si $\Delta > 0$: le trinôme admet alors deux racines distinces, qu'on note ici x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$, et on dispose alors de la factorisation : $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

  On est donc ramené à dresser le tableau de signes d'un produit :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		**signe de** a	0	$-$**signe de** a	0	**signe de** a	

- Cas $\Delta = 0$: alors le trinôme se factorise en $P(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x-\alpha)^2$.

  Comme $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ pour tout réel x, alors $P(x)$ s'annule en α est est ailleurs **toujours du signe de** a.

- Cas $\Delta < 0$: on revient à la forme canonique du trinôme, $P(x) = a\left[(x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$,

  où ici : $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif, et $(x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$ est donc toujours strictement positif.

  Le trinôme ne s'annule jamais et est **toujours du signe de** a sur $\mathbb{R}$.

I.6 Inéquations du second degré

Pour résoudre une inéquation du second degré, c'est-à-dire une inéquation comportant des termes où l'inconnue est au carré, on se ramène après développement, réduction et transposition de tous les termes dans un même membre, à l'étude du signe d'un trinôme.

Exemple : on veut résoudre l'inéquation $(x-1)(x+2) < 3x^2-3$.

On commence par développer et réduire le produit à gauche :

$$(x-1)(x+2) < 3x^2-3 \iff x^2+2x-x-2 < 3x^2-3 \iff x^2+x-2 < 3x^2-3$$

Ensuite on regroupe tous les termes dans un même membre de l'inégalité :

$$x^2+x-2 < 3x^2-3 \iff (x^2+x-2)-(3x^2-3) < 0 \iff -2x^2+x+1 < 0$$

La résolution de l'inéquation $(x-1)(x+2) < 3x^2-3$ se ramène donc à l'étude du signe du trinôme $-2x^2+x+1$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4\times(-2)\times 1 = 9 > 0$. L'équation $-2x^2+x+1$ a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{1-3}{2} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{1+3}{4} = 1$$

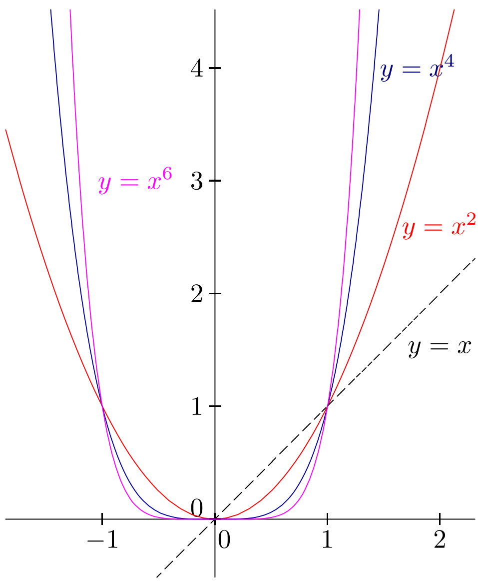
On a donc : $-2x^2 + x + 1 = -2(x + \frac{1}{2})(x - 1)$, et on dresse le tableau de signes du trinôme :

Comme on cherche les valeurs de x pour lequelle trinôme est **négatif**, on en déduit que :

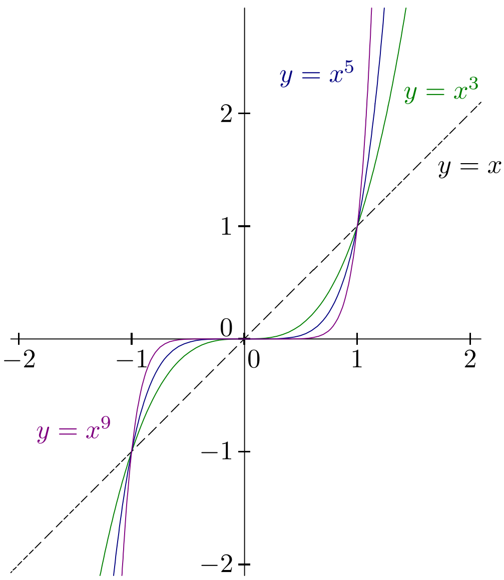
$$-2x^2 + x + 1 < 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-1)(x+2) < 3x^2-3$ est donc $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$.

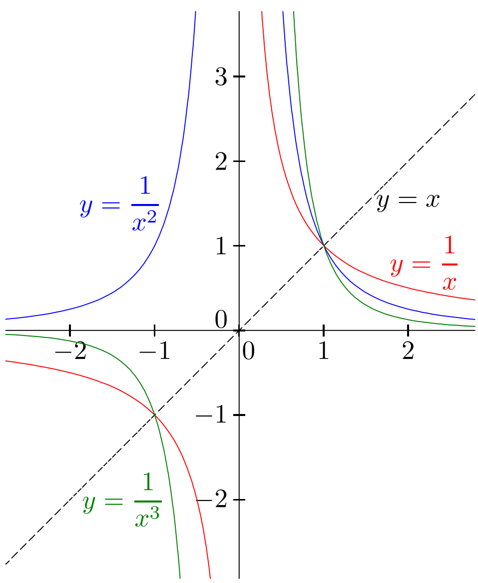
Courbes des fonctions puissances entières



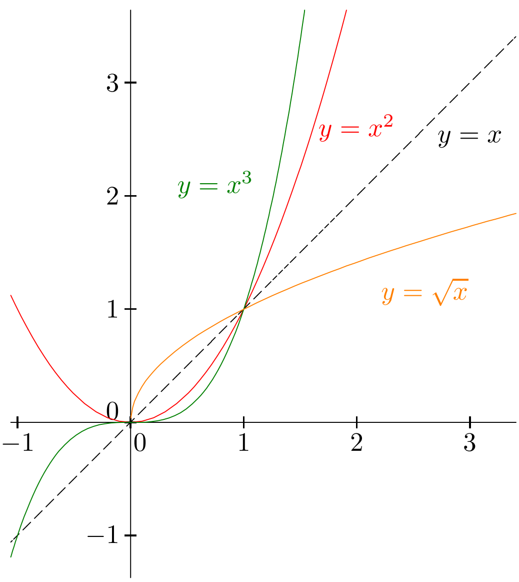
Cas des puissances paires



Cas des puissances impaires



fonctions inverses



Avec la racine carrée (rappel : $\forall x > 0,\ \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)

Étant donné que nous travaillerons l'an prochain sans calculatrice, il apparaît indispensable de savoir tracer de mémoire chacune de ces courbes, individuellement mais aussi les unes par rapport aux autres : on visualise ainsi beaucoup de propriétés des fonctions concernées.

II Logarithme népérien et exponentielle

Ces deux fonctions de référence ont été longuement étudiées en Terminale, voici quelques rappels sur leurs propriétés.

II.1 Fonction logarithme népérien

Une définition possible de la fonction logarithme népérien, notée ln est :

Définition du logarithme népérien

La fonction ln est, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'unique primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1.

Cette fonction est dérivable (donc continue) sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée vérifie : pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriétés du logarithme népérien

- Variations et signe du logarithme :

x	0 ||		1		$+\infty$
var ln	||	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de $\ln(x)$	||	$-$	0	$+$	

- La relation fondamentale : $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$ entraîne les formules suivantes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$$

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n.\ln(x)}$$

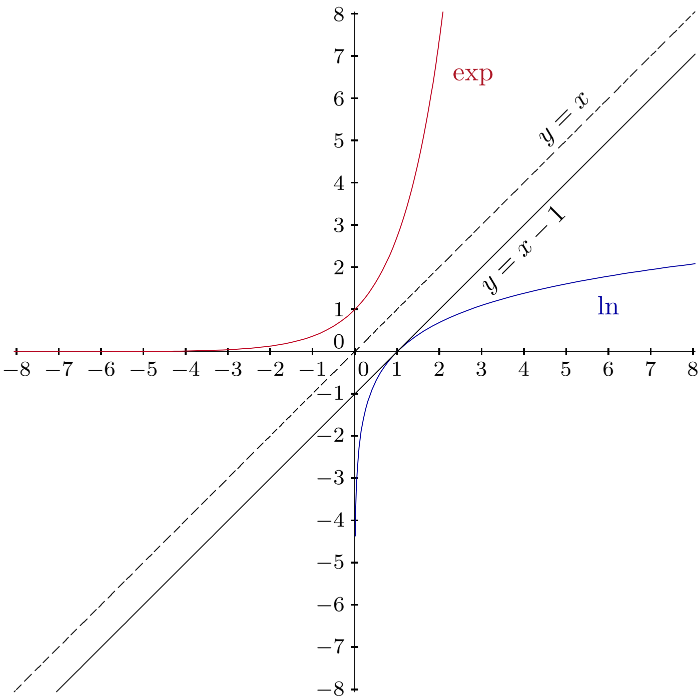
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)}$$

II.2 Fonction exponentielle

Avec la définition précédente du logarithme népérien et les propriétés qui en découlent, on peut affirmer (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires) que :

pour tout réel x, il existe un unique réel y strictement positif tel que $\ln(y) = x$.

On note alors : $y = \exp(x)$, et on définit ainsi la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.



Graphes des fonctions ln et exp : noter la symétrie des deux courbes par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriétés de l'exponentielle

- La fonction exp est définie, continue, strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et elle est sa propre dérivée :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).}$$

- Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre, au sens où :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \exp(\ln(x)) = x}$

Règles de calcul avec l'exponentielle

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$$

$$\text{d'où : } \boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}},$$

$$\text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \ (\exp(x))^n = \exp(n.x)}$$

Ce sont ces propriétés, analogues à celles des puissances, qui justifient la notation :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.}$$

Exercice 6 [logarithmes, exponentielles] (Solution)

Simplifier au maximum les expressions suivantes, à l'aide des règles rappelées ci-dessus :

- $\ln(16) - \ln(512) + \ln(0,125) = \dots$ (écrire en fonction de $\ln(2)$ seulement)
- $\ln(2) + \ln(16e) - \ln(4e^2) = \dots$ (écrire en fonction de $\ln(2)$ seulement)
- $\frac{1}{3}\ln(9) - 4\ln(\sqrt{3}) - \ln(\frac{1}{3}) = \dots$ (écrire en fonction de $\ln(3)$ seulement)
- $\ln(72) + \frac{1}{8}\ln(\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}\ln(\frac{1}{8}) - 2\ln(3) = \dots$ (écrire en fonction de $\ln(2)$ seulement)
- $\ln(36) + \ln(\frac{1}{12}) - \ln(2,25) + \ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0,875) = \dots$ (en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ seulement).
- $\ln(\frac{1}{2}) + \ln(\frac{2}{3}) + \cdots + \ln(\frac{98}{99}) + \ln(\frac{99}{100}) = \dots$ (écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ seulement)
- $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \dots$ (simplifier au maximum)
- $\ln\left((5+\sqrt{3})^{40}\right) + \ln\left((5-\sqrt{3})^{40}\right) = \dots$ (simplifier au maximum)
- $\dfrac{\exp(3x+1).\sqrt{\exp(2x-2)}}{\exp(4x+5).\exp(x-2)} = \dots$
- $e^{3\ln(2)} - \ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right) + e^{-\ln(\ln(2))} = \dots$
- $e^{-2\ln(3)} - \ln\left(\sqrt{e^4}\right) - \ln\left(\sqrt{e^2}\right) = \dots$
- $\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right) + \ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^6))}\right) = \dots$

Chapitre 3

Équations, inéquations

I Résolution d'équations

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer toutes les valeurs possibles de x pour lesquelles l'égalité proposée est vraie.

L'ensemble-solution peut être vide, contenir une unique solution, ou un nombre fini (non-nul) de solutions, ou une infinité de solutions.
On insistera beaucoup en ECE1 sur la nécessité de commencer par déterminer le **domaine de validité** de l'équation (c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'équation d'inconnue x a un sens).

On rappelle qu'il y a quatre grandes familles d'équations à savoir résoudre :

1. Les équations du premier degré
du type $ax + b = 0$, et par extension les équations où l'inconnue x peut être directement isolée dans un membre de l'équation, par exemple : $2e^{x-1} = 1$.

On utilise généralement les équivalences contenues dans les règles de calcul usuelles pour résoudre une équation simple :

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
  $a^2 = b^2 \iff (a = b \text{ **ou** } a = -b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ a^2 = b^2 \iff a = b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$,
  $\sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} \iff a = b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a^3 = b^3 \iff a = b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^a = e^b \iff a = b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$,
  $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

Elles transforment l'équation en une équation équivalente plus simple, afin d'isoler l'inconnue dans un membre de l'équation.

2. Les équations du second degré, du type $ax^2 + bx + c = 0$
du type $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) ou qui s'y ramènent : voir le paragraphe.

3. Les équations-produit, du type : $P(x) \times Q(x) = 0$,
Pour ces équations, la **règle du produit nul** s'applique, à savoir :

$$P(x) \times Q(x) = 0 \iff P(x) = 0 \quad \text{ou} \quad Q(x) = 0$$

On est ainsi ramené à résoudre deux équations plus simples. Remarquer la nécessité d'avoir un second membre nul ! Le produit $P(x) \times Q(x)$ peut demander une factorisation pour apparaître.

4. Les équations-quotient, du type : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$

$$\text{Dans ce cas :} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff \Big(P(x) = 0 \quad \text{et} \quad Q(x) \neq 0\Big)$$

ce qui signifie que les racines de $Q(x) = 0$ sont *valeurs interdites* pour l'équation, dont les solutions sont alors les racines de $P(x) = 0$ qui ne sont pas valeurs interdites. Une réduction au même dénominateur de plusieurs termes est souvent à l'origine de ce type d'équations.

Exercice 7 [Équations du second degré] (Solution)

1. Résoudre les équations suivantes :
   - (E_1) : $-8x^2 + 16 = 0$
   - (E_2) : $(x-1)(x^2+14) = 9x(1-x)$
   - (E_3) : $\dfrac{1}{x-1} = x - 2$
   - (E_4) : $\dfrac{2}{x+3} = x$
2. Résoudre les équations suivantes (on pourra poser un changement de variable) :
   - (E_5) : $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
   - (E_6) : $x = \sqrt{x} + 3$
   - (E_7) : $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 2 = 0$
   - (E_8) : $e^x + e^{-x} = 2$
3. On note (E) l'équation suivante, dans laquelle a est un paramètre :

$$(a+1)x^2 + ax - 1 = 0$$

   a) Factoriser l'expression $a^2 + 4a + 4$.
   b) Résoudre l'équation E dans le cas particulier où $a = -1$.
   c) Résoudre l'équation E dans le cas général.

4. Pour quelles valeurs de m l'équation suivante admet-elle deux racines distinctes et strictement positives ?

$$(m-3)x^2 + (1-2m)x + m + 1 = 0.$$

Exercice 8 [Équations] (Solution)
Résoudre les équations suivantes :

a) $3x^2 + 5x - 2 = 0$
b) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
c) $3x^5 + 5x^3 - 2x = 0$
d) $3e^{2x} + 5e^x - 2 = 0$
e) $x + \dfrac{1}{x} = 2$
f) $x^2 - 3x + 4 + \dfrac{8-6x}{x^2-2} = 0$
g) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x-1} = 2 - x + x^2$
h) $\dfrac{3}{4x^2} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3} = 0$

Exercice 9 [Équations] (Solution)
Résoudre les équations suivantes :

a) $x = \sqrt{x} + 2$
b) $x = \sqrt{x+2}$
c) $x - 7 = \sqrt{x-5}$
d) $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$
e) $\ln(x) + 7 = 0$
f) $\ln(x^2) - 6 = 0$
g) $(\ln(x))^2 - 6 = 0$
h) $\ln(x) - \ln(x-1) = 1$
i) $\ln(x + \dfrac{1}{x}) = \ln(2)$
j) $\ln(3x) + \ln(x+4) = 3\ln(4)$
k) $2\ln(x+1) + \ln(x) = 3\ln(x-2)$
l) $\ln(x^2 - 3x + 2) = 1$
m) $e^{1+4x^2} = 3$
n) $\ln(e^{2x} - 2e^x + 1) = 3$
o) $e^{1+\ln(x)} = \ln(3)$
p) $\dfrac{2e^x + 1}{e^x + 1} = \dfrac{e^x + 1}{2}$

II Inéquations

Les résolutions d'inéquations sont elles aussi de quatre grands types :

1. Les inéquations du premier degré, ou qui s'y ramènent, où l'inconnue x peut être isolée dans un membre, en respectant scrupuleusement les règles opératoires avec les inégalités.

2. Les inéquations du second degré où l'on applique cette fois les règles de signe d'un trinôme.

3. Les inéquations-produit et les inéquations-quotient où la détermination des solutions passe par un tableau de signes de l'expression (produit ou quotient).

Là encore on veillera à préciser le domaine de validité ; l'ensemble-solution (s'il n'est pas vide) fait souvent intervenir un *intervalle* ou une réunion d'intervalles ; on rappelle ici que, par exemple :

- $x > A \iff x \in]A; +\infty[$
- $A \leqslant x < B \iff x \in [A; B[$
- $x \leqslant B \iff x \in]-\infty, B]$
- $x \in]-\infty, A] \cup [B, +\infty[\iff (x \leqslant A \text{ ou } x \geqslant B)$

On procédera par opérations licites sur les inégalités, éventuellement en utilisant les propriétés de monotonie des fonctions usuelles (Attention aux ensembles de validité !), qui permettent d'écrire des équivalences du type :

$$\forall a, b \in I, \quad f(a) < f(b) \iff a < b \quad \text{ou} \quad \forall a, b \in J, \quad g(a) < g(b) \iff a > b$$

pour f strictement croissante sur I, et g strictement décroissante sur J.

▶ Un cas fréquent en ECE1 est celui où on est ramené à une étude de fonction, qui permet parfois d'en déduire son tableau de signes.

Inéquations classiques avec la fonction carré

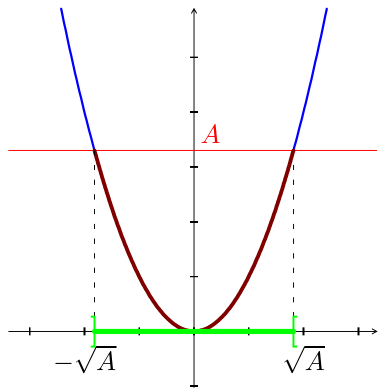
▶ Idée : avoir en tête la représentation graphique !

Inéquation du type : $x^2 < A$

On distingue deux cas :

- Si $A \leqslant 0$: l'inéquation n'admet *aucune* solution.
- Si $A > 0$: l'ensemble solution est l'intervalle $]-\sqrt{A}; \sqrt{A}[$, et on a l'équivalence :
  $x^2 < A \iff -\sqrt{A} < x < \sqrt{A}$.

▶ Quelles sont les solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant A$?



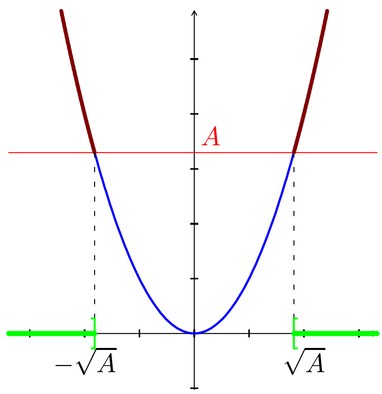
Inéquation du type : $x^2 \geqslant A$

On distingue deux cas :

- Si $A \leqslant 0$: l'inégalité est toujours vraie !
  $\forall A \in \mathbb{R}^-, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \geqslant 0 \geqslant A$.
- Si $A > 0$: l'ensemble solution est $]-\infty; -\sqrt{A}] \cup [\sqrt{A}; +\infty[$,

  et on a l'équivalence :
  $x^2 \geqslant A \iff (x \leqslant -\sqrt{A} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{A})$.

▶ Quelles sont les solutions de l'inéquation $x^2 > A$?



Exercice 10 [Inéquations] (Solution)
Résoudre les inéquations suivantes, sur le domaine indiqué :

a) $\ln(x-1) > -3$ sur $]1,+\infty[$
b) $\ln(3x+2) < 2$ sur $]-\frac{2}{3},+\infty[$
c) $\ln(x+6) - 2\ln(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$
d) $1 - 2e^{3x} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$
e) $(x+3)(2-e^x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$
f) $(1+2e^x)(1-2e^x) \leqslant 0$
g) $(1-e^{-x})(e^x-4) < 0$
h) $\ln(x) + \ln(x-1) > \ln(2)$ sur $]1,+\infty[$
i) $\ln(2x-1) < 2\ln(x)$ sur $]\frac{1}{2},+\infty[$.
j) $\ln(4x) + 2\ln(x+1) < 0$ sur $]0,+\infty[$.
k) $1-(\frac{3}{4})^n \geqslant 0,99$ où n est un *entier* naturel
l) $3 \times (\frac{11}{10})^n > 10$ (où $n \in \mathbb{N}$)
m) $1 + 0.95 + 0.95^2 + \ldots + 0.95^n > 10$ (où $n \in \mathbb{N}$)
n) $1.02 + 1.02^2 + \ldots + 1.02^n \geqslant 20$ (où $n \in \mathbb{N}$)

Exercice 11 [Inéquations] (Solution)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{x} \leqslant x$
b) $\dfrac{x^2+2}{x^2-2} \geqslant 2$
c) $\dfrac{t-1}{t+1} < \dfrac{2t}{t-1}$
d) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x^2-4} \leqslant 1$
e) $\sqrt{e^{2x}+3} > 2$
f) $2x^4 + x^2 \leqslant 3$

Exercice 12 [Résoudre les inéquations suivantes :] (Solution)

a) $x - \dfrac{2}{x} > 1$
b) $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{3}{x+3}$
c) $\ln(x^2) < 1$
d) $\ln(x)^2 < 1$
e) $\ln(x^2+3) > 2$
f) $\ln(\ln(x)) < 0$
g) $e^{-2+\ln(x)} < 3$
h) $\sqrt{x+8} \geqslant \sqrt{x^2-4}$
i) $\dfrac{1}{x-4} \leqslant 5$
j) $e^{2x} - 5e^{x+1} < -4e^2$

Chapitre 4

Étude de fonctions

Une part importante du programme de ECE1 sera consacrée à approfondir considérablement les notions abordées au lycée concernant l'étude d'une fonction. Les quelques rappels et exercices suivants sont destinés à susciter une révision approfondie des points suivants :

- Ensemble de définition d'une fonction.
- Tableau de variation
- Dérivabilité en un point ; nombre dérivé et tangente.
- Formules de dérivation.
- Fonctions continues ; théorème des valeurs intermédiaire, de LA valeur intermédiaire.
- Fonctions convexes, fonctions concaves.
- Primitives d'une fonction continue
- Calcul intégral, propriétés de l'intégrale.

Ci-dessous, quelques exercices pour garder contact avec ce que vous avez fait dans l'année ; on y trouvera aussi un résumé des formules de dérivation, à connaître par coeur désormais ! Le code couleur différencie les formules officiellement au nouveau programme de Terminale ES (en noir) , des nouvelles formules qui seront étudiées dans l'année (en bleu, qui figuraient, elles, dans l'ancien programme de TES), et qu'on pourra apprendre dès maintenant !

I Formulaire de dérivées

I.1 Dérivées des fonctions usuelles

Les fonctions f suivantes sont dérivables sur $\mathcal{D}_{f'}$ (*domaine de dérivabilité*), et leurs dérivées respectives sont données par :

$\mathcal{D}_f$	$f(x) =$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	x^n $(n \in \mathbb{Z}, n < 0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{x}$

I.2 Opérations sur les dérivées

Dans ce tableau, u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, vérifiant les conditions éventuellement exprimées dans la dernière colonne.

fonction	dérivée	Condition
$u + v$	$u' + v'$	
$k.u$	$k.u'$	k constant
$u.v$	$u' \times v + u \times v'$	
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\exp(u)$ ou e^u	$u' \times e^u$	
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	u strictement positive sur I
u^n	$n.u'.u^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I

Exercice 13 [Calculs de dérivées] (Solution)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée) :

- $a(x) = \dfrac{x^2}{4} - 3x^3 + x.\ln(x)$
- $b(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$
- $c(x) = \exp(x + 1/x)$
- $d(x) = 5x^3 - (2x+1).e^{-x+2x^2}$
- $e(x) = \dfrac{-x+2}{x+1}$
- $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2.\ln(x)}{3-x}$

Procéder de même avec la série suivante : on étudiera aussi pour celles-ci, leur sens de variations sur leur domaine de définition.

- $a(x) = e^{-x} - e^x$
- $b(x) = x^2 - 8x + 3 + 6\ln(x)$
- $c(x) = (x-2)e^x$
- $d(x) = \dfrac{x^2-4x}{e^x}$
- $e(x) = \dfrac{5}{x} + 2\ln(x)$
- $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$
- $g(x) = \dfrac{e^{1-x}}{x^2+1}$
- $h(x) = (x-2).e^{x-1}$

Exercice 14 [Fonctions et tangentes] (Solution)
N.B. : ici comme ailleurs, la notation e désigne le nombre $e^1 = \exp(1)$.

1. On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = ax + \dfrac{b}{\ln(x)}$.
   Déterminer les réels a et b tels que la courbe de f (notée $\mathcal{C}_f$), coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $x = e$, et que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A soit parallèle à la droite d'équation : $y = 2x - 1$.
2. On considère la fonction g définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x) = x - \dfrac{e}{\ln(x)}$.
   a) Étudier les variations de g ; synthétiser l'étude dans un tableau.
   b) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse e.

Exercice 15 [Étude de fonction] (Solution)
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) - x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.
2. Calculer $f(1)$; en déduire le signe de $f(x)$.
3. Montrer que l'équation : $f(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une solution unique sur $[1;e]$.
4. Utiliser astucieusement la question 1. pour calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 16 [Convexité] (Solution)
On définit ici la fonction f par : $f(x) = (2x-4).e^{-x}$.

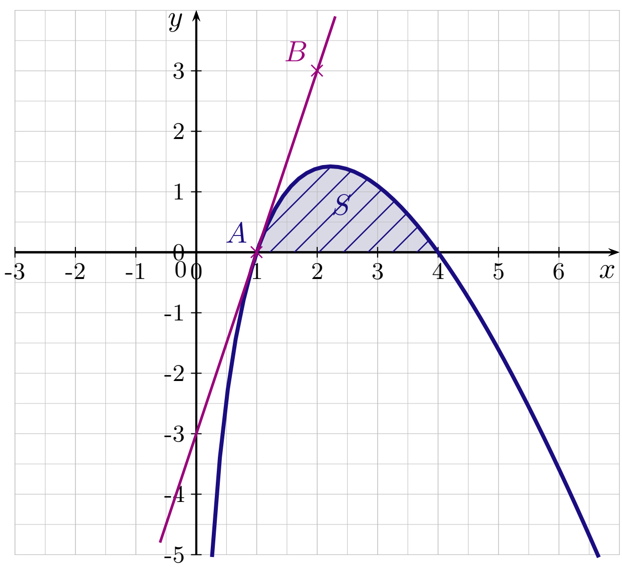
1. Étudier les variations de f.
2. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$ et étudier la convexité de f. Déterminer les points d'inflexion éventuels.
3. Reprendre les deux questions précédentes avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 17 [Étude complète de fonction] (Solution)
On considère ici la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, et f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1. a) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = (4x^2 - 8x - 5).e^{-x}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c) À l'aide des deux questions précédentes, dresser le tableau de variations de f.
2. Démontrer que l'équation : $f(x) = 3$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0; 2]$.
3. Déterminer les intervalles contenus dans $[0; +\infty[$ sur lesquels $\mathcal{C}_f$ est située *au-dessous de ses tangentes.*

Exercice 18 [synthèse] (Solution)



On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est représentée ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthonormal.

La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1; 0)$ et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathcal{C}$.

partie A

Pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = (ax + b).\ln(x)$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Par lecture graphique, donner $f(4)$ et $f'(1)$. Expliquer brièvement la démarche.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} 4a+b &= 0 \\ a+b &= 3 \end{cases}$

   Déterminer a et b. Ces valeurs sont utilisées dans la suite de l'exercice.

partie B

On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathcal{C}$.

1. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :
$$F(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2\ln(x) - \frac{x^2}{2} - 8x\ln(x) + 8x\right).$$
   Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de S exprimée en unités d'aire. Justifier.

Chapitre 5

Suites

Ce sera l'un des premiers gros chapitres de l'année, le cours sera entièrement refait ; l'essentiel, pour le moment, est de vous assurer que les notions sont acquises pour les exemples phares du programme de Première et Terminale : les suites arithmétiques et géométriques. Quelques rappels de cours et exercices ci-dessous pour ne pas perdre la main !

Définition d'une suite réelle

Une **suite réelle** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, ou une partie de $\mathbb{N}$ contenant tous les entiers n à partir d'un certain rang n_0, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier n, on définit ainsi un unique réel $u(n)$, qu'on notera plutôt u_n (notation indicée qui se lit : "u **indice** n"), qui s'appelle le *terme de rang* n de la suite.

La suite u est l'ensemble de ces termes (en nombre infini, donc), écrits dans l'ordre de leurs indices, on la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, u_3, \cdots)$$

On notera $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie *à partir du rang* n_0.

Remarques, exemples :

- Les entiers impairs : $1, 3, 5, \ldots$ forment une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n + 1$.

  En effet : $u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5, \ldots$.
- Les puissances successives de 2, forment une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n$.
  Ainsi : $v_0 = 1,\ v_1 = 2, \ldots, v_{10} = 1024$...

On rencontrera dans ce chapitre, deux façons différentes de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1) En exprimant chaque terme u_n en fonction de n à l'aide d'une *formule explicite* : il existe une fonction f définie au moins sur l'ensemble $\mathbb{N}$, ou au moins à partir d'un certain rang n_0 pour laquelle $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

2) À l'aide de la donnée du premier terme, et d'une relation dite de **récurrence** : la suite est alors définie par la donnée d'un terme initial u_0 (ou u_{n_0}) et d'une relation universelle de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction réelle connue, qui permet de calculer chaque nouveau terme de la suite en fonction du terme précédent.

Exemples :

- La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{4}{x^2+1}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et permet de définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n) = \dfrac{4}{n^2+1}$.
  Elle commence ainsi :$u_0 = 4,\ u_1 = 2,\ u_2 = \dfrac{4}{5},\ u_3 = \dfrac{2}{5}, \ldots$
- Le domaine de définition de la fonction ne contient pas forcément l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier, mais seulement à partir d'un certain rang :
  par exemple, la fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour domaine $]0, +\infty[$, et la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ n'existe qu'à partir du rang $n = 1$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

  ► À partir de quel rang la suite (w_n) est-elle définie par : $w_n = \ln(n^2 - 5)$?
- De façon plus générale, la formule explicite définissant une suite doit exister pour les entiers naturels, et ne provient pas forcément d'une fonction de la variable réelle : par exemple,
  $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ définit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (alors que $(-1)^x$ n'a pas de sens si x n'est pas entier).
- Calculer les 5 premiers termes de chacune des trois suites ci-dessous, définies par récurrence :
  ⋆ $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 5$

  ⋆ $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n^2 - 1$
  ⋆ $w_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}(w_n + \dfrac{2}{w_n})$
- La variable n peut intervenir de façon autonome dans la relation de récurrence : calculer les termes $u_1,\ u_2$ et u_3 la suite (u_n) définie par :
  $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + \dfrac{1}{2}n - 1.$
- La relation de récurrence peut aussi porter sur plusieurs générations :

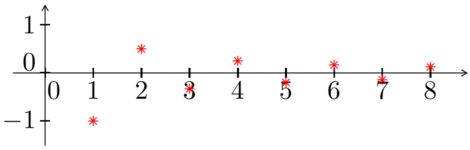
  On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Calculer u_2, u_3, u_6.
- Remarque : une définition par récurrence n'assure pas a priori la bonne existence des termes de la suite pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

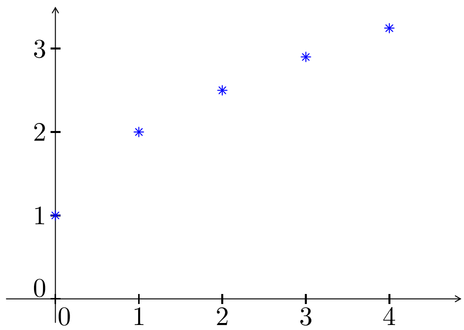
  ► Examiner par exemple la suite (u_n) définie par :
  $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - 1}$

Représentation graphique

La représentation graphique des suites réelles s'inspire de celle des fonctions numériques : on représente dans le plan les points de coordonnées $(0, u_0),\ (1, u_1),\ (2, u_2),\ \ldots, (n, u_n), \ldots$.

On obtient alors un nuage de points au lieu d'une courbe :





- ⋆ Ci-dessus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
- ⋆ À droite : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{v_n}$.

I Suites de référence

I.1 Suites arithmétiques

Définition d'une suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ constant tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \qquad \text{ou :} \quad u_{n+1} - u_n = r}$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.

Remarques :

- Si $r = 0$, la suite est constante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$.
- On parle d'une suite *arithmétique* au sens où chacun de ses termes est la moyenne arithmétique de celui qui le précède, et de celui qui le suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n-1} = u_n - r \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + r, \quad \text{d'où :} \quad \tfrac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}) = \tfrac{2u_n}{2} = u_n.$$

Calcul du n-ième terme d'une suite arithmétique

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr}$$

Mais aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1).r$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p + (n-p)r$$

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

→ que vaut la somme des 100 premiers nombres entiers positifs (non nuls) ? (Carl-Friedrich GAUSS, 1777-1855)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_{100} & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ S_{100} & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S_{100} = 101 \times 100, \text{ soit : } \quad S_{100} = 5050.$$

Plus généralement : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si S_n représente la somme des n premiers entiers non nuls, alors :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{noté aussi : } \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, on dispose alors de la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{2u_0 + n.r}{2} = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$\text{"Somme des termes d'une suite arithmétique"} = \mathsf{nb\ de\ termes} \times \frac{\mathsf{1er\ terme} + \mathsf{dernier\ terme}}{2}.$$

I.2 Suites géométriques

Définition d'une suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ constant tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n}$$

Le nombre q est la **raison** de la suite.

Remarque : si $q = 1$ (ou $u_0 = 0$!), la suite est constante.

Calcul du n-ième terme d'une suite géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \leqslant n, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \begin{cases} u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_0 \times (n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Si $q \neq 1$:

$$\text{"Somme des termes d'une suite géométrique"} = \mathsf{1er\ terme} \times \frac{1 - \mathsf{raison}^{\mathsf{nb\ de\ termes}}}{1 - \mathsf{raison}}.$$

I.3 Suites arithmético-géométriques

Définition d'une suite arithmético-géométrique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** si elle est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a \times u_n + b$$

(a, b réels fixés)

La suite n'est là encore pas forcément définie à partir du rang $n = 0$.

On remarque que pour $a = 1$ la suite est arithmétique, et que pour $b = 0$ elle est géométrique.

On étudiera donc le cas où $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

II Exercices

Exercice 19 [Suites arithmétiques] (Solution)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Exprimer u_n en fonction de n où $u_0 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 3$.
2. Exprimer v_n en fonction de n où $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = v_n + 7$.
3. Pour chacune des suites précédentes, calculer la somme des 12 premiers termes.
4. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, pour laquelle on pose :

   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Sachant que le terme de rang 80 vaut 393, et que le terme de rang 15 vaut 133, calculer u_0 et S_{80}.

5. Soit la suite définie par : $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.
   a) Calculer u_1 et u_2.
   b) Pour étudier cette suite, on définit la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   c) En déduire l'expression explicite de v_n, puis de u_n en fonction de n.
   d) Vérifier a posteriori que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Exercice 20 [Suites géométriques] (Solution)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 50$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n$.
   Trouver une formule explicite pour u_n. Calculer $S_{25} = \displaystyle\sum_{k=0}^{25} u_k$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_7 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$.
   Trouver une formule explicite pour v_n. Calculer $S_{16} = \displaystyle\sum_{k=1}^{16} v_k$.

Exercice 21 [Suite arithmético-géométrique] (Solution)

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m.

On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi.
Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de $6,05$ m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

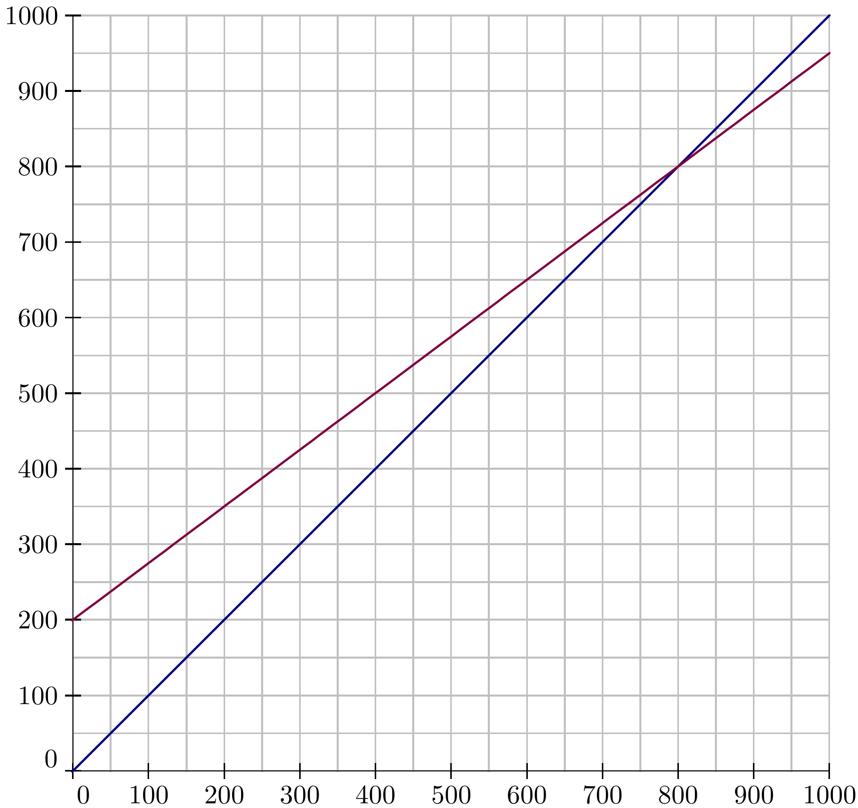
- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018.
   Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.
   a) Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06u_n - 15$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1,06$.
   Préciser son terme initial.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.
3. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
   a) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   b) L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau ? Justifier la réponse.

Exercice 22 [Suite arithmético-géométrique] (Solution)
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 300 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,75 \times u_n + 200.$$

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,75x + 200$ pour construire les cinq premiers termes de la suite (u_n). (*Cette construction est à faire sur le graphique de l'annexe ci-dessous*)
   Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?



2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 800$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 800 - 500 \times (0,75)^n$.
   c) La suite est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
3. Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2017, il y avait 300 abonnés.
   On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75% des abonnés renouvellent leur abonnement.
   On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année $2017 + n$; on a donc :

$$u_0 = 300 \text{ et } u_{n+1} = 0,75 \times u_n + 200.$$

   a) Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 700 ?

b) Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1000 abonnés ?

Exercice 23 [Exercice de synthèse sur les suites] (Solution)

En janvier 2016, un artisan a réalisé un chiffre d'affaires de 2300 euros, alors que ses charges se sont élevées à 800 euros, son bénéfice est donc de 1500 euros. Grâce à une clientèle en augmentation, le chiffre d'affaires augment de 1% par mois, tandis que les charges augmentent elles de 2.5% par mois.

1. On note, pour le mois n, R_n le montant des recettes et C_n le montant des charges, B_n le bénéfice réalisé.

   Exprimer R_n et C_n en fonction de n ; justifier votre réponse. En déduire B_n en fonction de n
2. Pour étudier les variations de la suite (B_n), on étudie le signe de $B_{n+1} - B_n$:
   a) Établir que pour tout entier naturel n : $B_{n+1} - B_n = 23 \times (1.01)^n - 20 \times (1.025)^n$.
   b) Montrer que l'inégalité : $B_{n+1} - B_n > 0$ est alors équivalente à : $\left(\dfrac{1.01}{1.025}\right)^n > \dfrac{20}{23}$.
   c) Déterminer les valeurs de l'entier n telles que $B_{n+1} - B_n > 0$ soit vérifié.
3. Conclure sur les variations de la suite (B_n). Le bénéfice de l'artisan peut-il diminuer ? Si oui, à partir de quel mois ?

Exercice 24 [Vu au Bac ES : exercice de synthèse] (Solution)

Dans une zone humide protégée, on s'intéresse à la population d'une espèce locale de grenouille.

On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$(\mathcal{R}) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right).$$

On suppose que $P_0 = 40000$ et $P_1 = 60000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

   a) Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. Exprimer U_n en fonction de n.
   b) En utilisant la relation $(\mathcal{R})$, calculer $V_{n+1} - V_n$.
   En déduire que, pour tout n, on a : $V_n = P_1 - \dfrac{1}{2}P_0$.
   Calculer V_n.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n = 2\left(V_n - U_n\right)$.
En déduire une expression de P_n en fonction de n.

d) Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Exercice 25 [Sens de variation d'une suite] (Solution)

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = 5n^2 + 3n$
2. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 7 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}.u_n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^2 + 1}{2} \end{cases}$

Chapitre 6

Probabilités

Un autre pilier du programme de ECE1, qui sera abordé un peu plus tard dans l'année ; les exercices de synthèses qui suivent sont donc destinés à entretenir les connaissances de lycée. N'hésitez pas à en chercher d'autres pour poursuivre l'entraînement !

Exercice 26 [Probabilités discrètes] (Solution)
Dans un magasin spécialisé en électroménager et multimédia, le responsable du rayon informatique fait le bilan sur les ventes d'ordinateurs portables, de tablettes, et d'ordinateurs fixes. Pour ces trois types de produits, le rayon informatique propose une extension de garantie.

Le responsable constate que 28% des acheteurs ont opté pour une tablette, et 48% pour un ordinateur portable.

Dans cet exercice, on suppose que chaque acheteur se procure un produit unique parmi les trois choix à sa disposition, et qu'il peut souscrire ou non une extension de garantie.

Parmi les acheteurs ayant acquis une tablette, 5% ont souscrit une extension de garantie, et parmi ceu ayant acquis un ordinateur fixe, $12,5\%$ on souscrit une extension de garantie.

On choisit au hasard un de ces acheteurs.

On définit les événements suivants :

T : « l'acheteur a choisi une tablette »
M : « l'acheteur a choisi un ordinateur portable »
F : « l'acheteur a choisi un ordiateur fixe »
G : « l'acheteur a choisi une extension de garantie »
On note aussi $\overline{T}$, $\overline{M}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ les événements contraires.

N.B. : dans tous les calculs qui suivent, on écrira d'abord les formules utilisées avec des événements avant de faire l'application numérique.

1. Construire un arbre pondéré contenant les données de l'énoncé.
2. Calculer $P(F)$, la probabilité de l'événement F, puis $P(F \cap G)$.
3. On sait que 12% des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie.
   Calculer la probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie.

4. Démontrer que $P(G) = 0,164$ en justifiant le calcul.
5. L'acheteur n'a pas choisi d'extension de garantie. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un ordinateur fixe ?
6. Pour tous les appareils, l'extension de garantie est d'un montant de 50 euros. Quelle recette complémentaire le responsable du rayon peut-il espérer, lorsque 1000 appareils seront vendus ?

Exercice 27 [Le Bac ? C'est loin !] (Solution)
Avant le baccalauréat, on estime que les trois quarts des candidats révisent (...sérieusement ?), et qu'un candidat a neuf chances sur dix d'être admis s'il a révisé, et seulement deux chances sur dix s'il n'a pas révisé.
Mais après le bac, tous les reçus font les fiers en prétendant qu'ils n'avaient même pas révisé, et tous les recalés crient à l'injustice et affirment avoir révisé 24 heures sur 24, 7 jours sur 7 !

On rencontre au hasard un candidat après l'examen.
Calculer la probabilité que ce candidat :

1. ... soit admis et n'ait pas révisé
2. ... soit admis et ait révisé
3. ... soit recalé et n'ait pas révisé
4. ... soit admis
5. ... ait révisé *sachant* qu'il est recalé
6. ... soit un menteur
7. ... soit un menteur sachant qu'il est admis
8. ... soit admis sachant qu'il est un menteur.
9. .... soit admis sachant qu'il dit la vérité

Peut-on dire que mentir augmente les chances d'être reçu au Bac ?

Indication : comme à l'exercice précédent, introduisez des événements (ici A, R, M par exemple) pour pouvoir traduire par un calcul chaque question.

Exercice 28 [Variable aléatoire discrète] (Solution)
Dans une kermesse, un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue, toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues. La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 euro et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les événements :

   $\star$ E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
   $\star$ F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases obtenues est rouge ».

   Montrer que $P(E) = 0,02$ et $P(F) = 0,17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges, le joueur reçoit 10 euros ; si une seule des cases est rouge, le joueur reçoit 2 euros ; sinon, il ne reçoit rien.
   X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 euro).

   a) Calculer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

   a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est : $p_n = 1 - (0,9)^n$.

   b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente, et préciser sa limite.

   c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

Exercice 29 [Variable à densité] (Solution)
Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes.
Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes n'est pas commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $m = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.
Les valeurs numériques demandées sertont arrondies au millième (le plus proche).

Partie A.
On donne le tableau suivant où les valeurs sont arrondies au millième (le plus proche) :

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	$0,035$	$0,086$	$0,182$	$0,325$	$0,5$	$0,675$	$0,818$	$0,914$	$0,965$

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard soit commercialisable.

3. Le commerçant trouve cette probabilité trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de m.
   Pour quelle valeur de σ (arrondie au dixième) la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96% ?
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 (loi normale centrée, réduite), on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B.

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96% de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question précédente, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Chapitre 7

Algorithmique

Un dernier point à ne pas négliger ! L'enseignement d'algorithmique sera fait en parallèle du cours de mathématiques (une séance de TP en demi-classe par quinzaine). Vous réaliserez rapidement que cet enseignement vient en parfaite continuité avec celui que vous avez reçu au lycée. Les quelques exercices de Bac sélectionnés ci-dessous sont destinés à entretenir les acquis sur ce thème.

Exercice 30 [Calculs de termes d'une suite] (Solution)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2. Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
   (a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1^{er} janvier de l'année $2013 + n$.

   Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
U est un nombre réel	U est un nombre réel	U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers
Début	**Début**	**Début**
Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire	Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire	| Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire
| Affecter $0,6\times U+120$ à U	| Affecter $0,4\times U+115$ à U	| Affecter $0,4\times U+120$ à U
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour
Afficher U	Afficher U	Afficher U
Fin	**Fin**	**Fin**

(b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 31 [Algorithme associé à un problème de seuil] (Solution)
On modélise la population d'une ville à partir du 1er janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3}{1+2\mathrm{e}^{-0,05x}}$$

où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.

On admet que f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	X prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(X)\leqslant 2$
	X prend la valeur $X+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Si l'on fait fonctionner cet algorithme, alors le résultat affiché en sortie est 28. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.

Exercice 32 [Recherche d'une solution à une équation] (Solution)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ par

$$f(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x + 1,$$

soit f' sa fonction dérivée et soit f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2\ ;\ 5]$, $f'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\ ;\ 5]$. Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
4. (a) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
   Montrer que T a pour équation $y = -\mathrm{e}^3 x + 3\mathrm{e}^3 + 1$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
   (c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.
   (d) En déduire que : $\alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.
   On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} < 3,05$.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b

(a) Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2							
étape 3							

(b) Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

Solutions des exercices

Exercice 1 **(énoncé)**

1. - $A = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{x}{2} \times 2 + 2^2 = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$
   -
   $$\begin{aligned} B &= (x+y+z)^2 = ((x+y)+z)^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + xz + yz + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

   .

   Remarque : il est intéressant de constater ici la généralisation de l'identité classique, au cas du carré de la somme de trois termes : on obtient la somme des carrés de chaque termes, plus tous les "doubles produits". Cette formule restera vraie dans le cas général du carré de la somme de n termes !
   - Une solution n'utilisant que des notions de lycée et du programme ES : d'après les règles de calcul avec les puissances :

   $$\begin{aligned} C &= (2x+3)^4 = (2x+3)^{2+2} = (2x+3)^2 \times (2x+3)^2 \\ &= \left(4x^2 + 12x + 9\right) \times \left(4x^2 + 12x + 9\right) = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81 \end{aligned}$$

   après avoir tout développé et regroupé selon les mêmes puissances.
   -
   $$\begin{aligned} D &= (a+b)^3 = (a+b)^2.(a+b) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a+b) \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

   Là encore, on généralise l'identité remarquable au cas de la troisième puissance. La formule la plus générale est appelée *formule du binôme de Newton*, que vous découvrirez cette année !
   -
   $$\begin{aligned} E &= (a-b)^3 = (a-b)^2.(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) \\ &= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$
   - $F = (2x-3)^3 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.3 + 3.2x.3^2 - 3^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
   par application de la formule précédente, avec $a = 2x$ et $b = 3$.
   -
   $$\begin{aligned} G &= (3x + \frac{1}{2})^3 - (6x+1)^2 + (x + \frac{1}{6}) \\ &= (3x)^3 + 3.(3x)^2.\frac{1}{2} + 3.3x.(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 - ((6x)^2 + 2.6x + 1) + x + \frac{1}{6} \\ &= 27x^3 + \frac{27}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{8} - 36x^2 - 12x - 1 + x + \frac{1}{6} \\ &= 27x^3 - \frac{45}{2}x^2 - \frac{35}{4}x - \frac{17}{24} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} H &= (2x-\frac{6}{5})(x+2)-(x+\frac{1}{5})(x-3)+2x(\frac{1}{10}-x) \\ &= 2x^2+4x-\frac{6}{5}x-\frac{12}{5}-(x^2-3x+\frac{1}{5}x-\frac{3}{5})+\frac{1}{5}x-2x^2 \\ &= -x^2+\frac{29}{5}x-\frac{9}{5} \end{aligned}$$

2. - $A = 2x^2-12x+18 = 2(x^2-6x+9) = 2(x-3)^2$
   - $B = 4y^2-36 = 4(y^2-9) = 4(y-3)(y+3)$
   - $C = -x^2+x+6$: $\Delta = 1^2-4\times 6\times(-1) = 25 > 0$, donc il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2.(-1)} = 3$, et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2.(-1)} = -2$, d'où la factorisation du trinôme du second degré :
   $$C = -x^2+x+6 = -(x-x_1)(x-x_2) = -(x-3)(x+2)$$
   - $$\begin{aligned} D &= (2x-6)(x+2)-(x+1)(x-3)+2x(3-x) \\ &= 2(x-3)(x+2)-(x+1)(x-3)-2x(x-3) \\ &= (x-3)[2(x+2)-(x+1)-2x] = (x-3)(-x+3) = -(x-3)^2 \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} E &= (3x+\frac{1}{2})^3-(6x+1)^2+(x+\frac{1}{6}) = \left(\frac{6x+1}{2}\right)^3-(6x+1)^2+\frac{6x+1}{6} \\ &= (6x+1).\left(\frac{(6x+1)^2}{8}-(6x+1)+\frac{1}{6}\right) \\ &= (6x+1).\left(\frac{36x^2+12x+1}{8}-6x-1+\frac{1}{6}\right) \\ &= (6x+1).\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{17}{24}\right) \end{aligned}$$

3. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 = a^3-b^3$; ainsi :
$$8x^3-27 = (2x)^3-3^3 = (2x-3)(4x^2+6x+9) \qquad \text{avec } a = 2x \text{ et } b = 3.$$

Exercice 2 **(énoncé)**

- $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
- $(\sqrt{a})^2 = a$ (valable pour un réel a *positif*).
- $\dfrac{(2/3)^3}{4/9} = \dfrac{2^3}{3^3}\times\dfrac{9}{4} = \dfrac{8}{27}\times\dfrac{9}{4} = \dfrac{2}{3}$.

- $\dfrac{2/n^4}{4/n} = \dfrac{2}{n^4} \times \dfrac{n}{4} = \dfrac{1}{2n^3}$.
- $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100} = \dfrac{2^5 \times 5^2 \times 3^{-4} \times 6^2}{3^8 \times 3 \times 5 \times 10^2} = \dfrac{2^7 \times 5^2 \times 3^{-2}}{3^9 \times 5^3 \times 2^2} = 2^5 \times 5^{-1} \times 3^{-11} = \dfrac{2^5}{5 \times 3^{11}}$.
- $\dfrac{t^3 + 3t^2}{t^3 - 9t} = \dfrac{t^2(t+3)}{t(t^2-9)} = \dfrac{t(t+3)}{(t-3)(t+3)} = \dfrac{t}{t-3}$.
- $(\sqrt{2}+5\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}-\sqrt{6}+10\sqrt{3}-15+4\times 3-2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+2 = 2\sqrt{2}+10\sqrt{3}-5\sqrt{6}-1$.
- $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = \dfrac{3-2\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} \times \dfrac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} = \dfrac{(3-2\sqrt{5})(4-\sqrt{5})}{4^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{12-3\sqrt{5}-8\sqrt{5}+10}{16-5} = \dfrac{22-11\sqrt{5}}{11} = 2-\sqrt{5}$.

  Commentaire : on a utilisé ici la *quantité conjuguée* du dénominateur $4+\sqrt{5}$, à savoir $4-\sqrt{5}$, afin de faire disparaître la racine carrée du dénominateur, via l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Un principe à retenir !
- $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2 = (7-2\sqrt{6}) + 2\sqrt{(7-2\sqrt{6})\times(7+2\sqrt{6})} + (7+2\sqrt{6})$ $= 14 + 2\sqrt{49 - 4\times 6} = 14 + 10 = 24$.

Exercice 3 **(énoncé)**

- $\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{2\times 5} + \dfrac{2}{3\times 5} = \dfrac{7\times 2\times 3 - 3\times 3 + 2\times 2}{2\times 3\times 5} = \dfrac{37}{30}$
- $\dfrac{5}{6} - \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{2\times 3} - \dfrac{3}{2\times 4} + \dfrac{4}{3\times 3} = \dfrac{5\times 4\times 3 - 3\times 3\times 3 + 4\times 2\times 4}{2\times 4\times 3\times 3} = \dfrac{60-27+32}{8\times 9} = \dfrac{65}{72}$
- $\dfrac{2}{3n} - \dfrac{5}{n^2} = \dfrac{2\times n - 5\times 3}{3\times n^2} = \dfrac{2n-15}{3n^2}$
- $\dfrac{x+4}{x-5} + \dfrac{3}{5-x} = \dfrac{x+4}{x-5} - \dfrac{3}{x-5} = \dfrac{x+4-3}{x-5} = \dfrac{x+1}{x-5}$.
- $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x-2(x-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x+2}{x(x-1)}$
- $\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{(n+1)(n+2)-2n(n+2)+n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2+3n+2-2n^2-4n+n^2}{n(n+1)(n+2)}$ $\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$
- $\dfrac{6}{x^2-3x} - \dfrac{4}{x^2-2x} = \dfrac{6}{x(x-3)} - \dfrac{4}{x(x-2)} = \dfrac{6(x-2)-4(x-3)}{x(x-2)(x-3)} = \dfrac{2x}{x(x-2)(x-3)} = \dfrac{2}{(x-2)(x-3)}$. Ne pas oublier de simplifier les facteurs communs éventuels entre le numérateur et le dénominateur après réduction !
- $\dfrac{2x+1}{2x+4} - \dfrac{3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x+1}{2(x+2)} - \dfrac{3x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{(2x+1)(x+2)-6x^2}{2(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+5x+2-6x^2}{2(x+2)^2} =$

$\dfrac{-4x^2+5x+2}{2(x+2)^2}$.

- $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2(x-3)-1}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x-7}{(x+3)(x-3)}$.

Exercice 4 **(énoncé)**

1.

Exercice 5 **(énoncé)**

- $3x^2(xy^2)^5=3x^2\times x^5\times y^{2\times 5}=3x^7y^{10}$
- $\dfrac{(2xy^2)^3}{4x^4y^4}=\dfrac{2^3\times x^3\times y^{2\times 3}}{4x^4y^4}=\dfrac{8x^3y^6}{4x^4y^4}=\dfrac{2y^2}{x}$
- $(a^4b^{-6})^{3/2}=a^{4\times 3/2}\times b^{-6\times 3/2}=a^6b^{-9}=\dfrac{a^6}{b^9}$.
- $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{ab^{-2}-ba^{-2}}=\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{\dfrac{b-a}{ab}}{\dfrac{a^3-b^3}{a^2b^2}}=\dfrac{b-a}{ab}\times\dfrac{a^2b^2}{a^3-b^3}=\dfrac{ab(b-a)}{a^3-b^3}$.

  Le résultat de la question 3. de l'exercice 1 permet de faire apparaître une factorisation du dénominateur pour une dernière simplification :
  $\dfrac{ab(b-a)}{a^3-b^3}=\dfrac{ab(b-a)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=-\dfrac{ab}{a^2+ab+b^2}$.
- $\dfrac{a^{-4}b^3a^3}{(ab^2)^{-2}}=\dfrac{a^{3-4}b^3}{a^{-2}.b^{-4}}=a^{-1+2}b^{3+4}=ab^7$
- $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-1}}+\dfrac{b^{-2}}{a^{-1}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{b}{a^2}+\dfrac{a}{b^2}\right)^{-1}=\left(\dfrac{b^3+a^3}{a^2b^2}\right)^{-1}=\dfrac{a^2b^2}{a^3+b^3}$.
- $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{-4}\left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)^{-3}=\dfrac{x^{-8}}{y^{-12}}.\dfrac{y^{-6}}{x^{-9}}=x^{-8+9}y^{12-6}=x.y^6$
- $3\times 2^{7n+1}\times 2^{n+3}\times 3^{n-1}=3\times(2^7)^n\times 2\times 2^n\times 2^3\times 3^n\dfrac{1}{3}=(128\times 2\times 3)^n\times 16=16\times 768^n$
- $\dfrac{(-2)^{2k-1}}{3^{4k+1}}=\dfrac{\left((-2)^2\right)^k\times(-2)^{-1}}{(3^4)^k\times 3}=-\dfrac{1}{2\times 3}\times\dfrac{4^k}{81^k}=-\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{4}{81}\right)^k$
- $\dfrac{a^4\times\dfrac{(b^3a)^{-2}}{a^6b^3}}{(a^7b^{-5})^4\times\dfrac{a^{-3}b^8}{a^5b^{10}}}=\dfrac{a^4\times b^{-6}\times a^{-2}\times a^{-6}\times b^{-3}}{a^{28}\times b^{-20}\times a^{-3}\times b^8\times a^{-5}\times b^{-10}}=\dfrac{a^{-4}\times b^{-9}}{a^{20}\times b^{-22}}=a^{-4-20}\times$
  $b^{-9+22}=a^{-24}\times b^{13}=\dfrac{b^{13}}{a^{24}}$

Exercice 6 **(énoncé)**

- $\ln(16)-\ln(512)+\ln(0,125)=\ln(2^4)-\ln(2^9)+\ln(\dfrac{1}{8})=4\ln(2)-9\ln(2)-\ln(2^3)=-8\ln(2)$
- $\ln(2)+\ln(16e)-\ln(4e^2)=\ln(2)+\ln(2^4)+\ln(e)-\ln(2^2)-2\ln(e)=\ln(2)+4\ln(2)+1-2\ln(2)-2=3\ln(2)-1$
- $\dfrac{1}{3}\ln(9)-4\ln(\sqrt{3})-\ln(\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}\ln(3^2)-4\ln(3^{1/2})-(-\ln(3))=\dfrac{2}{3}\ln(3)-2\ln(3)+\ln(3)=-\dfrac{1}{3}\ln(3)$

- $\ln(72)+\frac{1}{8}\ln(\frac{1}{4})-\frac{1}{4}\ln(\frac{1}{8})-2\ln(3)=\ln(2^3\times 3^2)-\frac{1}{8}\ln(2^2)+\frac{1}{4}\ln(2^3)-2\ln(3)$
$=3\ln(2)+2\ln(3)-\frac{1}{4}\ln(2)+\frac{3}{4}\ln(2)-2\ln(3)=\frac{7}{2}\ln(2)$
- $\ln(36)+\ln(\frac{1}{12})-\ln(2,25)+\ln(21)+2\ln(14)-3\ln(0,875)$
$=\ln(2^2\times 3^2)-\ln(3\times 2^2)-\ln(\frac{9}{4})+\ln(3\times 7)+2\ln(2\times 7)-3\ln(\frac{7}{8})$
$=2\ln(2)+2\ln(3)-\ln(3)-2\ln(2)-2\ln(3)+2\ln(2)+\ln(3)+\ln(7)+2\ln(2)+2\ln(7)-3\ln(7)+9\ln(2)$
$=13\ln(2)$
- $\ln(\frac{1}{2})+\ln(\frac{2}{3})+\cdots+\ln(\frac{98}{99})+\ln(\frac{99}{100})=\ln(1)-\ln(2)+\ln(2)-\ln(3)+\ln(3)-\ln(4)+\ldots+\ln(98)-\ln(99)+\ln(99)-\ln(100)=\ln(1)-\ln(100)=0-\ln(2^2\times 5^2)=-2\ln(2)-2\ln(5)$: dans cette somme, presque tous les termes se simplifient car ils sont comptés une fois positivement, une fois négativement. On parlera plus tard de *télescopage* dans la somme.
- $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\ln\left(\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4}\right)=\ln(\frac{5-1}{4})=\ln(1)=0\,!!$
- $\ln\left((5+\sqrt{3})^{40}\right)+\ln\left((5-\sqrt{3})^{40}\right)=40\ln(5+\sqrt{3})+40\ln(5-\sqrt{3})=40\ln\left((5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})\right)$
$=40\ln(25-3)=40\ln(22)$
- $\frac{\exp(3x+1).\sqrt{\exp(2x-2)}}{\exp(4x+5).\exp(x-2)}=\frac{e^{3x+1}.\sqrt{(e^{x-1})^2}}{e^{4x+5+x-2}}=\frac{e^{3x+1+x-1}}{e^{5x+3}}=e^{4x-5x-3}=e^{-x-3}$
- $e^{3\ln(2)}-\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)+e^{-\ln(\ln(2))}=e^{\ln(2^3)}+\ln(e^{17})+\frac{1}{e^{\ln(\ln(2))}}=8+17+\frac{1}{\ln(2)}=25+\frac{1}{\ln(2)}$
- $e^{-2\ln(3)}-\ln\left(\sqrt{e^4}\right)-\ln\left(\sqrt{e^2}\right)=\frac{1}{e^{\ln(3^2)}}-\frac{1}{2}\ln(e^4)-\ln(e^1)=\frac{1}{9}-2-1=-\frac{26}{9}$
- $\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)+\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^6))}\right)=\exp(-\frac{1}{3}\times(-3))+\frac{1}{2}\ln(\exp(-6))=e-3$

Exercice 7 **(énoncé)**

1. (E_1) : $-8x^2+16=0 \iff 16=8x^2 \iff x^2=2$: les deux solutions sont donc $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Passer ici par la méthode générale avec le déterminant est inefficace en comparaison !

   (E_2) : $(x-1)(x^2+14)=9x(1-x) \iff (x-1)(x^2+14)-9x(1-x)=0 \iff (x-1)(x^2+14)+9x(x-1)=0 \iff (x-1)(x^2+9x+14)=0$
   d'après la règle du produit nul, on a donc :
   $x-1=0 \iff x=1$, ou $x^2+9x+14=0$. Le discriminant du trinôme du second degré est $\Delta=9^2-4\times 14\times 1=81-56=25$, il y a deux racines : $x_1=\frac{-9-\sqrt{25}}{2}=-7$, et $x_2=\frac{-9+\sqrt{25}}{2}=-2$.
   Il y a donc trois solutions à l'équation : $\{-7,-2,1\}$.

   (E_3) : $\frac{1}{x-1}=x-2 \iff 1=(x-1)(x-2)$ (où $x\neq 1$) $\iff x^2-3x+1=0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 = 5$, il y a deux racines : $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(E_4) : $\frac{2}{x+3} = x \iff 2 = x(x+3) \iff x^2 + 3x - 2 = 0$ ($x \neq 0$ et $x \neq -3$)

$\Delta = 9 - 4 \times (-2) = 9 + 8 = 17$, il y a donc deux racines : $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

2. Un changement de variable/d'inconnue, en posant X en fonction de x, permet parfois de se ramener à une équation plus simple. Mais il ne faut pas oublier que ce sont, en définitive, les valeurs solutions de x, qui nous intéressent !

   (E_5) : $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$; il est intéressant ici de poser $X = x^2$, car l'équation devient alors :
   $3X^2 + 5X - 2 = 0$, équation du second degré de discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49$.
   Les deux racines sont : $X_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2 \times 3} = -\frac{12}{6} = -2$, et $X_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$.
   L'équation $x^2 = -2$ n'a aucune solution, et $x^2 = \frac{1}{3}$ en a deux, l'ensemble solution est finalement : $\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

   (E_6) : $x = \sqrt{x} + 3$ (équation valable, donc, uniquement pour un réel positif x) ; ici, le changement de variable $X = \sqrt{x}$ permet de réécrire l'équation :
   $X^2 - X - 3 = 0$, de discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-3) = 13 > 0$, il y a donc deux racines : $X_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, et $X_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.
   Comme une racine carrée est toujours de signe positif, l'équation $\sqrt{x} = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ n'a pas de solution (le second membre est négatif).
   L'équation $\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ admet pour unique solution : $x = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{13}+13}{4} = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

   (E_7) : $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 2 = 0$; le changement d'inconnue $X = \ln(x)$ permet de réécrire l'équation : $x^2 + 3x + 2 = 0$, dont les racines sont -1 et -2 après calculs.
   Il reste donc à résoudre : $\ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$ et $\ln(x) = -2 \iff x = e^{-2}$, les solutions de l'équation de départ sont donc : $\{e^{-1}, e^{-2}\}$.

   (E_8) : $e^x + e^{-x} = 2 \iff e^{2x} + 1 = 2e^x \iff (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \iff (e^x - 1)^2 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$. On aurait pu réaliser ici le changement de variable $X = e^x$ pour aboutir à l'équation :
   $X^2 - 2X + 1 = 0 \iff (X-1)^2 = 0$...

3. On note (E) l'équation suivante, dans laquelle a est un paramètre :

$$(a+1)x^2 + ax - 1 = 0$$

(a) D'après une identité remarquable : $a^2+4a+4=(a+2)^2$.

(b) Lorsque $a=-1$, l'équation devient : $-x-1=0 \iff x=-1$, elle admet une unique solution.

(c) Lorsque $a \neq -1$, $a+1 \neq 0$ et on a bien affaire à une équation du second degré, de discriminant : $\Delta = a^2-4\times(-1)\times(a+1) = a^2+4a+4 = (a+2)^2 \geqslant 0$.
Il y a alors deux racines (confondues si $a=-2$) :
$$x_1 = \frac{-a-(a+2)}{2(a+1)} = \frac{-2(a+1)}{2(a+1)} = -1, \text{ et } x_2 = \frac{-a+(a+2)}{2(a+1)} = \frac{1}{a+1}.$$

4. Soit l'équation (E) : $(m-3)x^2+(1-2m)x+m+1=0$. Comme précédemment, on peut commencer par étudier le cas particulier où l'équation n'est pas du second degré : lorsque $m=3$, l'équation devient : $-5x+4=0$, qui a pour unique solution $x_0=\dfrac{4}{5}$.
Pour tout $m\neq 3$, l'équation (E) est du second degré, et a pour discriminant :
$\Delta=(1-2m)^2-4(m+1)(m-3)=1-4m+4m^2-4(m^2-2m-3)=4m+13$.
On distingue alors plusieurs cas :
$\star$ Soit $4m+13<0 \iff m<-\dfrac{13}{4}$, dans ce cas l'équation (E) ne possède aucune solution.
$\star$ Soit $4m+13=0 \iff m=-\dfrac{13}{4}$, dans ce cas l'équation admet une solution unique, qui vaut :
$x_0=-\dfrac{1-2m}{2(m-3)}=\dfrac{3}{5}$ après remplacement de m par $-\dfrac{13}{4}$.
$\star$ Enfin, lorsque $4m+13>0 \iff m>-\dfrac{13}{4}$, l'équation (E) admet deux solutions :
$$x_1=\frac{(2m-1)-\sqrt{4m+13}}{2(m-3)}, \text{ et } x_2=\frac{(2m-1)+\sqrt{4m+13}}{2(m-3)}.$$

Il reste enfin, dans ce dernier cas, à étudier le *signe* des deux racines selon la valeur du paramètre m : on applique pour cela la règle de signe d'un quotient, et on résout successivement trois inéquations :

- $m-3>0 \iff m>3$
- L'inéquation : $2m-1-\sqrt{4m+13}>0 \iff 2m-1>\sqrt{4m+13}$ demande davantage d'attention.

  "Passer au carré" n'a pas de sens mathématique en général, et encore moins ici ; ce qu'on veut utiliser, c'est le sens de variation de la fonction $x\mapsto x^2$ pour ramener la comparaison de deux nombres à celle de leurs carrés. Or non seulement ladite fonction change de sens de variation suivant qu'on se place sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$, mais surtout il est totalement inutile et absurde d'y avoir recours lorsque les deux réels de départ sont de signes opposés, leur comparaison est alors évidente !

  En clair : si $2m-1<0 \iff m<\dfrac{1}{2}$, il est évident que $2m-1-\sqrt{4m+13}<0$... !
  Par contre, si $2m-1\geqslant 0$, et puisque la fonction carré est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}_+$, alors on a l'équivalence :
  $2m-1>\sqrt{4m+13} \iff (2m-1)^2>4m+13 \iff 4m^2-4m+1>4m+13$

$\iff 4m^2 - 8m - 12 > 0 \iff m^2 - 2m - 3 > 0$ (on divise les deux membres par $4 > 0$).

On trouve facilement que les deux racines du trinôme sont -1 et 3, et les règles de signe donnent en n'oubliant pas qu'on travaille ici avec $m \geqslant 1/2$:

$m^2 - 2m - 3 > 0 \iff m < -1$ ou $m > 3$, la première option étant exclue ici.

On peut donc dresser le tableau de signes suivant :

m	$-13/4$		-1		$1/2$		3		$+\infty$
$m-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2m-1)-\sqrt{4m+13}$		$-$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x_1		$+$		$+$		$+$	||	$+$	

Ainsi cette première racine, lorsqu'elle est bien définie, est toujours strictement positive.

- On étudie de même l'inéquation $2m-1+\sqrt{4m+13} > 0 \iff \sqrt{4m+13} > 1-2m$:

  Elle est toujours vraie dès que $1-2m < 0 \iff m > 1/2$. Sinon, la stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ donne encore, pour $m \geqslant 1/2$:
  $\sqrt{4m+13} > 1-2m \iff 4m+13 > (1-2m)^2 \iff 4m+13 > 4m^2-4m+1 \iff m^2 - 2m - 3 < 0$.
  L'étude précédente dit que c'est vrai lorsque $m \in]-1,3[$ **et** $m \geqslant 1/2$, d'où le tableau de signes :

m	$-13/4$		-1		$1/2$		3		$+\infty$
$m-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2m-1)+\sqrt{4m+13}$		$-$	0	$+$	|	$+$		$+$	
x_2		$+$	0		$-$		||	$+$	

On peut donc conclure de cette étude détaillée, que l'équation de départ admet deux solutions, strictement positives si et seulement si :

$$m \in \left]-\frac{13}{4}; -1\right[\cup]3; +\infty[$$

Exercice 8 **(énoncé)**

a) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ est une équation du second degré, de discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49 > 0$.

Il y donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{49}}{2\times 3} = \dfrac{-12}{6} = -2$, et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{49}}{6} = \dfrac{1}{3}$.

$\mathcal{S} = \{-2, \frac{1}{3}\}$.

b) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$: le changement d'inconnue $X = x^2$ permet de se ramener à l'équation $3X^2 + 5X - 2 = 0$, déjà résolue précédemment, ce qui assure l'équivalence :

$3X^2+5X-2=0 \iff X=-2$ ou $X=\dfrac{1}{3}$, ou encore :
$3x^4+5x^2-2=0 \iff x^2=-2$ ou $x^2=\dfrac{1}{3}$. La première éventualité étant impossible, on obtient :
$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

c) $3x^5+5x^3-2x=0 \iff x(3x^4+5x^2-2)=0$: la **règle du produit nul** donne l'équivalence de cette équation avec la disjonction de cas :
$x=0$ où $3x^4+5x^2-2=0$, d'où : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}},0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

d) $3e^{2x}+5e^x-2=0 \iff 3X^2+5X-2=0$ avec le changement d'inconnue $X=e^x$, d'où l'équivalence :
$3e^{2x}+5e^x-2=0 \iff e^x=-2$ ou $e^x=\dfrac{1}{3}$; le premier cas est impossible ($\forall x \in \mathbb{R},\ e^x>0$), le deuxième donne : $e^x=\dfrac{1}{3} \iff x=\ln(\dfrac{1}{3})=-\ln(3)$.
$\mathcal{S}=\{-\ln(3)\}$.

e) $x+\dfrac{1}{x}=2$: cette équation est valide sur $\mathbb{R}^*$, et :
$x+\dfrac{1}{x}=2 \iff \dfrac{x^2+1-2x}{x}=0 \iff \dfrac{(x-1)^2}{x}=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x-1=0$.
Donc : $\mathcal{S}=\{1\}$.

f) $e^x+e^{-x}=2 \iff X+\dfrac{1}{X}=2$ avec le changement d'inconnue $X=e^x$. L'équation précédente donne donc :
$e^x+e^{-x}=2 \iff e^x=1 \iff x=0$: $\mathcal{S}=\{0\}$.

g) $x^2-3x+4+\dfrac{8-6x}{x^2-2}=0$: cette équation a du sens si $x^2\neq 2$, donc sur $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.
$x^2-3x+4+\dfrac{8-6x}{x^2-2} \iff \dfrac{(x^2-3x+4)(x^2-2)+8-6x}{x^2-2}=0$
$\iff \dfrac{x^4-2x^2-3x^3+6x+4x^2-8+8-6x}{x^2-2}=0 \iff \dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-2}=0 \iff$
$\dfrac{x^2(x^2-3x+2)}{x^2-2}=0$.
D'après la règle du produit nul, l'équation est alors équivalente (sur le domaine de validité), à :
$x^2=0$ ou $x^2-3x+2=0 \iff x=0$ ou $x=1$, ou $x=2$ après résolution de l'équation du second degré : $\mathcal{S}=\{0,1,2\}$.

h) $\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x-1}=2-x+x^2$: le domaine de valivité de cett équation est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et elle est équivalente à :
$\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x-1}-2+x-x^2=0 \iff \dfrac{x^3+2x^2-x+1+(x-1)(-2+x-x^2)}{x-1}=0$
$\iff \dfrac{x^3+2x^2-x+1-2x+2+x^2-x-x^3+x^2}{x-1} \iff \dfrac{4x^2-4x+3}{x-1}=0 \iff$
$4x^2-4x+3=0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta=(-4)^2-4\times3\times4=-32<0$, donc elle n'admet finalement aucune solution : $\mathcal{S}=\varnothing$.

i) $\dfrac{3}{4x^2} + \dfrac{1}{2x} - 3 = 0$: le domaine de validité de cette équation est $\mathbb{R}^*$, elle est équivalente à :
$\dfrac{9 + 6x - 4x^2}{12x^2} = 0 \iff 4x^2 - 6x - 9 = 0$: le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-9) \times 4 = 180$, il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{180}}{2 \times 4} = \dfrac{6 - 6\sqrt{5}}{8} = \dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 9 **(énoncé)**

a) $x = \sqrt{x} + 2$: cette équation a du sens pour $x \in \mathbb{R}^+$, le changement d'inconnue : $X = \sqrt{x}$ donne l'équation
$X^2 = X + 2 \iff X^2 - X - 2 = 0$, équation du second degré dont les solutions sont, après calcul : $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$.
L'égalité : $\sqrt{x} = -1$ est bien sûr impossible, et $\sqrt{x} = 2$ a pour unique solution $x = 4$: $\mathcal{S} = \{4\}$.

b) $x = \sqrt{x+2}$: cette équation a du sens si et seulement si $x + 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$.
On se trouve ici dans la situation où $x = \sqrt{x+2}$ *implique* : $x^2 = x + 2$ sans qu'on puisse garantir l'équivalence, car x n'est pas forcément positif.
La dernière équation a pour solution, comme vu ci-dessus : $x = -1$ et $x = 2$.
On doit donc, réciproquement, tester chacune d'elles :
$\sqrt{-1+2} = 1 \neq 1$, donc -1 n'est pas solution de l'équation de départ. $\sqrt{2+2} = 2$, donc 2 est solution de l'équation de départ, et c'est la seule : $\mathcal{S} = \{2\}$.

c) $x - 7 = \sqrt{x-5}$: le domaine de validité de l'équation est $[5; +\infty[$, le passage au carré donne seulement l'implication :
$x - 7 = \sqrt{x-5} \Longrightarrow (x-7)^2 = x - 5 \iff x^2 - 14x + 49 = x - 5 \iff x^2 - 15x + 54 = 0$.
Le discriminant de l'équation est $\Delta = (-15)^2 - 4 \times 54 = 225 - 216 = 9$, il y a donc deux racines :
$x_1 = \dfrac{15 - \sqrt{9}}{2} = 6$, et $x_2 = \dfrac{15 + \sqrt{9}}{2} = 9$.
Reste donc, réciproquement, à tester ces deux valeurs :
$\sqrt{6-5} = 1 \neq 6 - 7$, donc 6 n'est pas solution de l'équation de départ. $\sqrt{9-5} = 2 = 9 - 7$, donc 9 est solution de l'équation de départ, et c'est la seule : $\mathcal{S} = \{9\}$.

d) $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$: l'égalité $A^2 = B^2$ étant équivalente à $A = B$ **ou** $A = -B$, on est ramené à étudier deux équations :
$x^2 - 3x + 4 = x^2 + 2x - 5 \iff -5x + 9 = 0 \iff x = \dfrac{9}{5}$,
et $x^2 - 3x + 4 = -(x^2 + 2x - 5) \iff 2x^2 - x - 1 = 0$, qui a pour solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ après calculs.
L'équation de départ admet donc trois solutions : $\mathcal{S} = \{-\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{9}{5}\}$.

e) $\ln(x) + 7 = 0 \iff \ln(x) = -7 \iff x = e^{-7}$ (on obtient bien une solution strictement positive).

f) $\ln(x^2) - 6 = 0$: on remarque ici que le domaine de validité de l'équation étant $\mathbb{R}^*$ (si $x \neq 0$, $x^2 > 0$, on ne peut pas employer la relation : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$, qui n'est vraie

que pour $x > 0$. Tout au plus pourra-t-on écrire : $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$...
Bref, il est plus simple d'utiliser l'équivalence : $\forall(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln(a) = \ln(b) \iff a = b$, soit
$\ln(x^2) - 6 = 0 \iff \ln(x^2) = 6 \iff x^2 = e^6 \iff x = e^3$ ou $x = -e^3$: $\mathcal{S} = \{-e^3, e^3\}$.

g) $(\ln(x))^2 - 6 = 0$: le domaine de validité est ici $\mathbb{R}^{+*}$, attention à ne pas confondre (pour $x > 0$), les expressions :
$\ln(x^2) = \ln(x \times x) = 2\ln(x)$, et $(\ln(x))^2 = \ln(x) \times \ln(x)$. En l'occurence :
$(\ln(x))^2 - 6 = 0 \iff (\ln(x))^2 = 6 \iff \ln(x) = -6$ ou $\ln(x) = 6$, d'où l'ensemble solution : $\mathcal{S} = \{e^{-6}, e^6\}$.

Exercice 11 **(énoncé)**

Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble de tous les réels pour lesquels l'inégalité proposée est vraie. L'ensemble solution se présentera presque toujours sous la forme d'un intervalle, ou d'une réunion d'intervalles. Différentes méthodes s'appliquent, les six exemples qui suivent abordent les plus classiques.

a) $2x^4 + x^2 \leqslant 3$

En posant $X = x^2$, on se ramène à une inéquation du second degré : $2X^2 + X - 3 \leqslant 0$.
L'étude des trinômes du second degré, faite en classe de première, comprend notamment celle du signe de ces trinômes, directement lié aux racines éventuelles ; ici, $\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25 > 0$, il y a deux racines : $X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2 \times 2} = -\dfrac{3}{2}$, et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 2} = 1$.
Le tableau de signes du trinôme est donc le suivant :

X	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$2X^2 + X - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En rappelant la règle : « le trinôme $aX^2 + bX + c$ est du signe de a (ici $2 > 0$) à l'extérieur des racines, et du signe opposé à celui de a à l'intérieur des racines ».
Les solutions de l'inéquation en X sont donc tous les réels de l'intervalle $[-3/2; 1]$.
Il reste donc à revenir à l'inconnue x de départ, en traduisant l'appartenance à cet intervalle par la double inégalité : $-3/2 \leqslant X \leqslant 1 \iff -3/2 \leqslant x^2 \leqslant 1$.
Comme $-3/2 \leqslant x^2$ est toujours vraie (le carré d'un réel est toujours positif !), il reste à résoudre $x^2 \leqslant 1$, soit : $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
Finalement, l'ensemble solution de cette première inéquation est l'intervalle $[-1, 1]$.

b) $\dfrac{1}{x} \leqslant x \iff \dfrac{1}{x} - x \leqslant 0 \iff \dfrac{1-x^2}{x} \leqslant 0$.
Il est ici pertinent de se ramener à une inéquation avec un second membre nul, car on est alors ramené à l'étude du *signe* d'une expression, en l'espèce un quotient. Les racines du trinôme $1 - x^2$ sont évidentes, il s'agit de -1 et 1. D'après les rappels faits à l'exemple précédent, on en déduit le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-x^2}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

À partir duquel on lit directement l'ensemble solution : $\mathcal{S} = [-1, 0[\cup[1, +\infty[$.

c) $\dfrac{x^2+2}{x^2-2} \geqslant 2 \iff \dfrac{x^2+2}{x^2-2} - 2 \geqslant 0 \iff \dfrac{-x^2+6}{x^2-2} \geqslant 0$ après réduction au même dénominateur.
Les deux racines évidentes du numérateur sont $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$, celles du dénominateur sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. On construit le tableau de signes du quotient :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$-x^2+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+6}{x^2-2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'où l'ensemble solution : $\mathcal{S} = [-\sqrt{6}, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \sqrt{6}]$.

d) $\dfrac{t-1}{t+1} < \dfrac{2t}{t-1} \iff \dfrac{t-1}{t+1} - \dfrac{2t}{t-1} < 0 \iff \dfrac{(t-1)^2 - 2t(t+1)}{(t+1)(t-1)} < 0 \iff \dfrac{t^2-2t+1-2t^2-2t}{t^2-1} < 0$
$\iff \dfrac{-t^2-4t+1}{t^2-1} < 0$. Ne surtout pas employer de produit en croix, absolument invalide avec des inégalités !
Les deux racines du dénominateur sont évidentes et valent $+1$ et -1.
Le numérateur est un trinôme de discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20 > 0$, il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{20}}{2.(-1)} = \sqrt{5}-2$, et $x_2 = -\sqrt{5}-2$.
Sachant que $\sqrt{4} = 2 < \sqrt{5} < 3 = \sqrt{9}$, on a $-\sqrt{5}-2 < -1 < \sqrt{5}-2 < 1$, ce qui permet de construire le tableau suivant :

t	$-\infty$		$-\sqrt{5}-2$		-1		$\sqrt{5}-2$		1		$+\infty$
$-t^2-4t+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
t^2-1		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-t^2-4t+1}{t^2-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Et l'ensemble solution de l'inéquation est : $\mathcal{S} =]-\infty, -\sqrt{5}-2[\cup]-1, \sqrt{5}-2[\cup]1, +\infty[$.

e) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2-4} \leqslant 1 \iff \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{(x+2)(x-2)}-1 \leqslant 0 \iff \dfrac{x-2+1-(x^2-4)}{(x+2)(x-2)} \leqslant 0$
$\iff \dfrac{-x^2+x+4}{x^2-4} \leqslant 0.$

Les deux racines évidentes du dénominateur sont -2 et 2, le numérateur est un trinôme du second degré, de discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 17 > 0$. Il y a donc deux racines, $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2.(-1)} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$, et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

L'encadrement : $\sqrt{16} = 4 < \sqrt{17} < \sqrt{25} = 5$ assure les inégalités : $-2 < \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} < 2 < \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-2		$(1-\sqrt{17})/2$		2		$(1+\sqrt{17})/2$		$+\infty$
$-x^2+x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+x+4}{x^2-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'où l'ensemble solution : $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup[\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}, 2[\cup[\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty[$.

f) $\sqrt{e^{2x}+3} > 2$: on utilise ici les variations des fonctions de référence pour transformer l'inéquation, dans le but d'isoler x :
$\sqrt{e^{2x}+3} > 2$
$\iff e^{2x}+3 > 4$ par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$
$\iff e^{2x} > 1$
$\iff 2x > \ln(1)$ par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$
$\iff x > 0$
Cette inéquation a donc pour ensemble solution : $\mathcal{S} =]0; +\infty[$.

Exercice 12 **(énoncé)**

Exercice 13 **(énoncé)**

- $\star$ $a(x) = \dfrac{x^2}{4} - 3x^3 + x.\ln(x)$
  $a'(x) = \dfrac{2x}{4} - 3 \times 3x^2 + 1.\ln(x) + x.\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{2} - 9x^2 + \ln(x) + 1$
- $\star$ $b(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$
  $b'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - e^{2x}.2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}.$
- $\star$ $c(x) = \exp(x + 1/x)$
  $c'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right).\exp(x + \dfrac{1}{x}).$

⋆ $d(x) = 5x^3 - (2x+1).e^{-x+2x^2}$
$d'(x) = 15x^2 - \left(2.e^{-x+2x^2} + (2x+1).(-1+4x).e^{-x+2x^2}\right) = 15x^2 - (8x^2+2x+1).e^{-x+2x^2}$.

⋆ $e(x) = \dfrac{-x+2}{x+1}$
$e'(x) = \dfrac{-1.(x+1)-(-x+2).1}{(x+1)^2} = -\dfrac{3}{(x+1)^2}$

⋆ $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2.\ln(x)}{3-x}$
$f'(x) = \dfrac{(2x+2+\frac{2}{x}).(3-x)-(x^2+2x+2\ln(x)).(-1)}{(3-x)^2} = \dfrac{-x^2+6x+4+\frac{6}{x}+2\ln(x)}{(3-x)^2}$.

Dans la série suivante, on doit préciser le domaine de définition pour dresser le tableau de variations :

⋆ $a(x) = e^{-x} - e^x$
La fonction a est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, avec :
Pour tout réel x, $a'(x) = -e^{-x} - e^x$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive, il est clair que : $a'(x) < 0$ pour tout réel x. La fonction a et par conséquent, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

⋆ $b(x) = x^2 - 8x + 3 + 6\ln(x)$
La fonction b est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ seulement, à cause de la fonction ln, avec :
pour tout réel $x > 0$: $b'(x) = 2x - 8 + \dfrac{6}{x} = 2.\dfrac{x^2-4x+3}{x}$. Dans ce quotient, le dénominateur est strictement positif sur le domaine d'étude, donc $b'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 - 4x + 3$.
Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 4 > 0$, donc il possède deux racines : $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$, et $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$. On en déduit que :
•Sur $]-\infty, 1]$ et $[3, +\infty[$, $x^2 - 4x + 3 > 0$ et la fonction b est strictement croissante sur chacun de ces deux intervalles.
•Sur $[1, 3]$, $x^2 - 4x + 3 < 0$ et la fonction b est strictement décroissante sur cet intervalle.

⋆ $c(x) = (x-2)e^x$
La fonction c est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, avec :
pour tout réel x, $c'(x) = 1.e^x + (x-2).e^x = (x-1).e^x$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive, le signe de $c'(x)$ est celui de $(x-1)$, et :
•sur $]-\infty, 1[$, $x - 1 < 0$ et la fonction c est strictement décroissante sur cet intervalle.
•sur $]1; +\infty[$, $x - 1 > 0$ et la fonction c est strictement croissante sur cet intervalle.

⋆ $d(x) = \dfrac{x^2-4x}{e^x}$
Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, la fonction d est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, on la réécrit d'ailleurs : $d(x) = (x^2-4x).e^{-x}$, car il est toujours plus facile de dériver un produit, qu'un quotient !
Pour tout réel x : $d'(x) = (2x-4).e^{-x} + (x^2-4x).(-e^{-x}) = e^{-x}.(-x^2+6x-4)$.

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $d'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 6x - 4$. Le discriminant de ce dernier est $\Delta = 6^2 - 4 \times (-4) \times (-1) = 36 - 16 = 20 > 0$, il y a donc deux racines :
$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{20}}{2.(-1)} = \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{5}$, et $x_2 = 3 - \sqrt{5}$. Comme le coefficient dominant est $a = -1 < 0$, on conclut que :
•sur les intervalles $]-\infty, 3 - \sqrt{5}[$ et $]3 + \sqrt{5}, +\infty[$, $d'(x) < 0$ et la fonction d est strictement décroissante sur chacun d'eux.
•sur l'intervalle $]3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}[$, $d'(x) > 0$ et la fonction d est strictement croissante sur cet intervalle.

⋆ $e(x) = \dfrac{5}{x} + 2\ln(x)$.
La fonction e est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, avec :
pour tout réel $x > 0$, $e'(x) = -\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x - 5}{x^2}$.
Le dénominateur est toujours strictement positif, le signe de $e'(x)$ est donc celui de $2x - 5$. Ainsi :
•Sur $]-\infty, \frac{5}{2}[$, $e'(x) < 0$ et la fonction e est strictement décroissante sur cet intervalle.
•Sur $]\frac{5}{2}, +\infty[$, $e'(x) > 0$ et la fonction e est strictement croissante sur cet intervalle.

⋆ $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.
La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec :
pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 0 + \dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln(x).1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.
Le dénominateur est toujours strictement positif, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - \ln(x)$. Pour le déterminer, on peut par exemple résoudre l'inéquation :
$1 - \ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff e > x$. Ainsi :
•sur $]e, +\infty[$, $f'(x) > 0$ et le fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
•sur $]-\infty, e[$, $f'(x) < 0$ et la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.

⋆ $g(x) = \dfrac{e^{1-x}}{x^2 + 1}$.
Comme $x^2 + 1$ est toujours strictement positif quel que soit le réel x, on peut conclure que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :
pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{-e^{1-x}.(x^2 + 1) - e^{1-x}.2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{e^{1-x}}{(x^2 + 1)^2}.(-x^2 - 2x - 1) = -\dfrac{e^{1-x}(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$.
Avec une telle écriture, il est alors évident que $g'(x)$ est toujours strictement négative (sauf en $x = -1$ où elle est nulle), ce qui fait de g une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

⋆ $h(x) = (x - 2).e^{x-1}$.
La fonction h n'a pas de valeurs interdites, elle est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :
pour tout réel x, $h'(x) = 1.e^{x-1} + (x - 2).1.e^{x-1} = e^{x-1}.(x - 1)$.

Comme e^{x-1} est strictement positif quel que soit le réel x, on conclut que $h'(x)$ a le signe de $x-1$, et :
•sur $]-\infty,1[$, $h'(x)<0$ et la fonction h est strictement décroissante sur cet intervalle.
•sur $]1,+\infty[$, $h'(x)>0$ et la fonction h est strictement croissante sur cet intervalle.

Exercice 14 **(énoncé)**

1. On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=ax+\dfrac{b}{\ln(x)}$.
   Dire que la courbe de f coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $x=e$ signifie que A a pour ordonnée 0, c'est-à-dire que : $f(e)=0 \iff a\times e+\dfrac{b}{\ln(e)}=0 \iff a\times e+b=0$ puisque $\ln(e)=1$.

   Dire que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est parallèle à la droite d'équation : $y=2x-1$, signifie que ces deux droites ont le même coefficient directeur, ici égal à 2 donc.
   Or l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est : $y=f'(e)(x-e)+f(e)$, donc son coefficient directeur est $f'(e)$.
   Pour tout x de $]1;+\infty[$, il faut donc calculer :
   $f'(x)=a+b\times\left(-\dfrac{1/x}{(\ln(x))^2}\right)=a-\dfrac{b}{x(\ln(x))^2}$ (utilisation de la formule de dérivation de $\dfrac{1}{u}$, avec $u=\ln$), et :
   $f'(e)=a-\dfrac{b}{e}$, d'où la relation : $a-\dfrac{b}{e}=2 \iff a\times e-b=2e$.
   Les réels a et b sont par conséquent solutions du système linéaire :
   $$\begin{cases} a\times e + b = 0 \\ a\times e - b = 2e \end{cases} \iff \begin{cases} a\times e + b = 0 \\ 2ae = 2e \quad L_2\leftarrow L_2+L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -e \end{cases}$$
   L'expression explicite de f est donc, pour tout réel x de $]1;+\infty[$: $f(x)=x-\dfrac{e}{\ln(x)}$.

2. On considère la fonction g définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x)=x-\dfrac{e}{\ln(x)}$. (Quelle surprise !)
   a) La dérivée de g (aka f...) a été calculée ci-dessus :
      pour tout x de $]1;+\infty[$, $g'(x)=a-\dfrac{b}{x(\ln(x))^2}=1+\dfrac{e}{x(\ln(x))^2}$.
      Sur $]1;+\infty[$, $\ln(x)$ est déjà strictement positif, donc il est clair que $g'(x)$ est toujours strictement positive sur cet intervalle : la fonction g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
   b) La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse e a pour équation :
      $y=g'(e)(x-e)+g(e) \iff y=2(x-e)+0 \iff y=2x-2e$ vu que $g'(e)=f'(e)=2$ et $g(e)=f(e)=0$ ont déjà été obtenus plus haut !

Exercice 15 **(énoncé)**

1. La fonction f est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle, avec :

$\forall x > 0,\ f'(x) = 1.\ln(x) + x.\dfrac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$
Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée, qui est simplement la fonction logarithme népérien dont on connaît parfaitement le signe, ainsi :
$\star$ Sur $]0;1]$, $f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante sur cet intervalle
$\star$ Sur $[1;+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante sur cet intervalle.

2. On calcule : $f(1) = 1.\ln(1) - 1 + 1 = 0$. Or d'après l'étude précédente, $x = 1$ est le réel enlequel la fonction f atteint son *minimum* sur $]0;+\infty[$. On en déduit que : pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 0 = f(1)$, c'est-à-dire que la fonction garde toujours un signe positif.
3. Petite application classique du théorème de LA valeur intermédiaire (qu'on appellera cette année *théorème de la bijection*) : la fonction f est continue sur l'intervalle $[1,e]$, l'étude précédente montre qu'elle est aussi strictement croissante sur cet intervalle, avec par ailleurs : $f(1) = 0$ et $f(e) = e.\ln(e) - e + 1 = e - e + 1 = 1$. Donc, $\dfrac{1}{2}$ est bien compris entre les images de 1 et de e par f : le thèorème de La valeur intermédiaire assure que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une unique solution dans l'intervalle $[1,e]$.
4. Le calcul de la dérivée de f a donné la fonction ln à la question 1. : cela signifie, inversement, que f est une *primitive* de la fonction ln sur $]0;+\infty[$!
On peut donc calculer l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_1^e = f(e) - f(1) = 1$ d'après les calculs précédents.

Exercice 16 **(énoncé)**
On définit ici la fonction f par : $f(x) = (2x-4).e^{-x}$.

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :
pour tout réel x, $f'(x) = 2.e^{-x} + (2x-4).(-e^{-x}) = (-2x+6).e^{-x}$. Comme e^{-x} est toujours strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x+6$. On en conclut que :
$\star$ Sur $]-\infty,3[$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
$\star$ Sur $]3,+\infty[$, $f'(x) < 0$ et la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.
2. La fonction f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :
pour tout réel x, $f''(x) = -2.e^{-x} + (-2x+6).(-e^{-x}) = (2x-8).e^{-x} = 2(x-4).e^{-x}$.
On en conclut que :
$\star$ Sur $]-\infty,4]$, $f''(x) \leqslant 0$ et f est *concave* sur cet intervalle.
$\star$ Sur $[4,+\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ et f est *convexe* sur cet intervalle.
Comme la fonction f'' s'annule en changeant de signe en $x = 4$, on dit que le point de coordonnées
$(4, f(4)) = (4, 4.e^{-4})$ est un *point d'inflexion* de la courbe de f.
3. En définissant cette fois, sur$\mathbb{R}$, la fonction $g :\ x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$:
pour tout réel x, $g'(x) = -x.e^{-\frac{x^2}{2}}$, qui est du signe opposé à x.
La fonction g est donc croissante sur $]-\infty,0]$, et décroissante sur $[0,+\infty[$.
Pour tout réel x : $g''(x) = -1.e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x).(-x).e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1).e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Le signe de $g''(x)$ est donc celui de x^2-1, dont les deux racines évidentes sont -1 et 1. On en conclut que :
$\star$ sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$, $g''(x) \geqslant 0$ et la fonction g est convexe sur chacun de ces

deux intervalles.
$\star$ sur $[-1,1]$, $g''(x) \leqslant 0$ et la fonction g est concave sur cet intervalle.
La fonction change donc de convexité/concavité en $x=-1$ et $x=1$, la courbe de g admet donc deux points d'inflexion, de coordonnées $(1, g(1)) = (1, e^{-1/2})$ et $(-1, e^{-1/2})$.

Exercice 17 **(énoncé)**

On considère ici la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-4x^2+5)e^{-x}+3$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, et f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1. a) On dérive la fonction f comme un produit (et une somme) de fonctions, bien dérivables sur $\mathbb{R}$:
   Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-8x).e^{-x} + (-4x^2+5).(-1).e^{-x} + 0 = (4x^2-8x-5).e^{-x}$ effectivement, après factorisation et simplification.

   b) On sait que l'exponentielle est toujours de signe positif, quel que soit le réel auquel on applique cette fonction : le signe de $f'(x)$ est donc, au vu du produit précédent, le même que celui du trinôme du second degré $4x^2-8x-5$.
   Son discriminant est : $\Delta = (-8)^2 - 4.(-5).4 = 64+80 = 144 = (12)^2$, il y a donc deux racines distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-(-8)-\sqrt{144}}{2\times 4} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$, et $x_2 = \dfrac{-(-8)+\sqrt{144}}{2\times 4} = \dfrac{20}{8} = \dfrac{5}{2}$.
   Le coefficient dominant étant $a = 4 > 0$, le trinôme est donc :
   $\star$ Du signe de a, donc positif, à l'*extérieur des racines*, c'est-à-dire sur $]-\infty; -\dfrac{1}{2}]$ et $[\dfrac{5}{2}; +\infty[$,
   $\star$ Et du signe opposé à a, donc négatif, à l'*intérieur des racines*, c'est-à-dire sur l'intervallle $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}]$.

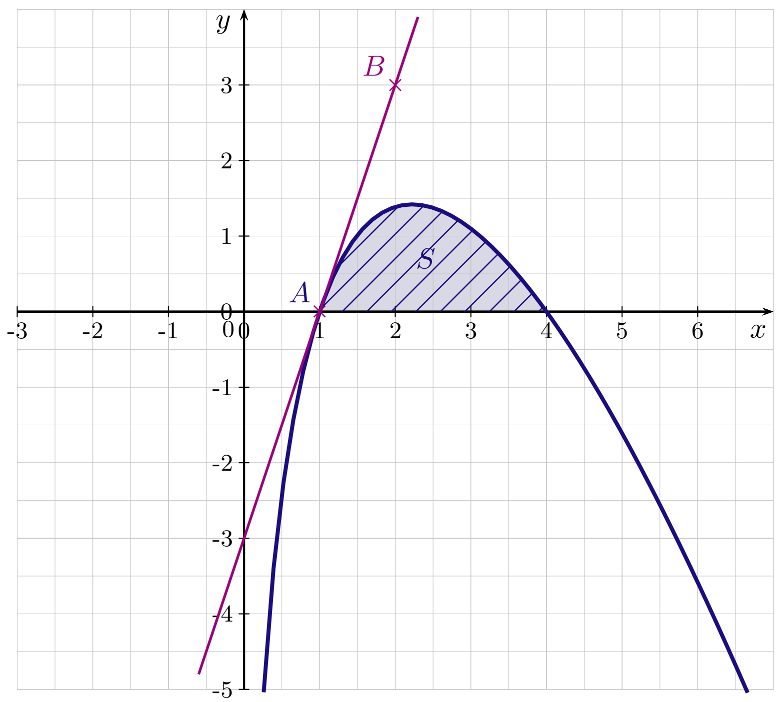
   c) Les variations d'une fonction dépendent du signe de la dérivée ; on en déduit le tableau :

x	$-\infty$		$-1/2$		$5/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

2. L'intervalle $[0;2]$ est entièrement inclus dans $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}]$, sur lequel la fonction f est sctrictement décroissante.
   La fonction f est également continue sur cet intervalle (somme et produit de fonctions de référence continues).
   On a de plus : $f(0) = 5.e^0 + 3 = 8$, et $f(2) = -11.e^{-2} + 3 \approx 1.51$, donc la valeur 3 est bien comprise entre ces deux images.
   Le *théorème de LA valeur intermédiaire*, permet alors de conclure que l'équation : $f(x) = 3$ admet bien une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0, 2]$.

3. Les positions relatives de la courbe de f et de ses tangentes, dépendent de la *convexité* de la fonction, qu'on détermine via l'étude du signe de sa *dérivée seconde* :
pour tout réel positif x, $f''(x) = (8x-8).e^{-x} + (4x^2-8x-5).(-1).e^{-x} = (-4x^2 + 16x-3).e^{-x}$.
Là encore, le signe de $f''(x)$ est celui d'un trinôme du second degré, ici $-4x^2+16x-3$ qui a pour discriminant $\Delta = 16^2 - 4\times(-4)\times(-3) = 256-48 = 208 = 16\times 13$.
Il y a donc deux racines : $y_1 = \dfrac{-16-\sqrt{\Delta}}{2\times(-4)} = \dfrac{-16-4\sqrt{13}}{-8} = 2+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, et $y_2 = 2-\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
La fonction f'' est alors négative, car du signe de $a=-4$, sur les intervalles : $]-\infty, 2-\dfrac{\sqrt{13}}{2}]$ et $[2+\dfrac{\sqrt{13}}{2}, +\infty[$.
Sur ces intervalles, f est *concave* et sa courbe est bien située en-dessous des tangentes.

Exercice 18 **(énoncé)**



On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est représentée ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthonormal.

La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1;0)$ et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathcal{C}$.

partie A

Pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln x$ où a et b sont deux réels.

1. La fonction f est bien dérivable sur $]0;+\infty[$ avec :
$\forall x > 0,\ f'(x) = a.\ln(x) + (ax+b).\dfrac{1}{x} = a.\ln(x) + a + \dfrac{b}{x}$.

2. Par lecture graphique : $f(4) = 0$, et $f'(1) = 3$ car c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
3. Si on rapproche les deux valeurs précédentes avec les expressions de f et f', on obtient les relations :
   $f(4) = (4a+b).\ln(4) = 0 \iff 4a+b=0$ car $\ln(4) \neq 0$,
   et : $f'(1) = a.\ln(1) + a + \dfrac{b}{1} = 3 \iff a+b=3$.
   Les deux réels a et b sont bien solutions du système : $\begin{cases} 4a+b &= 0 \\ a+b &= 3 \end{cases}$, dont on trouve facilement l'unique solution : $a=-1$ et $b=4$.
   Ainsi : $\forall x > 0,\ f(x) = (-x+4).\ln(x)$.

partie B

On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathcal{C}$.

1. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2} - 8x\ln x + 8x\right)$
   La fonction F est bien dérivable sur $]0;+\infty[$, on calcule sa dérivée :
   $\forall x > 0,\ F'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(2x.\ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} - \frac{1}{2}.2x - 8(1.\ln(x) + x.\frac{1}{x}) + 8\right) = -\dfrac{1}{2}.(2x.\ln(x) + x$
   $-x\ln(x) + 4\ln(x) = f(x)$, donc F est bien une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. La primitive obtenue permet de calculer l'aire hachurée sous la forme d'une intégrale,puisqu'elle est comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses :
   $S = \displaystyle\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_1^4 = F(4) - F(1) = -\dfrac{1}{2}\left(16\ln 4 - \dfrac{16}{2} - 32\ln(4) + 32\right) + \dfrac{1}{2}\left(\ln 1 - \dfrac{1}{2} - 8\ln 1 + 8\right)$
   $= 8\ln(4) - 12 - \dfrac{1}{4} + 4 = \boxed{16\ln(2) - \dfrac{33}{4}}$

Exercice 19 **(énoncé)**

1. $\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$: la suite (u_n) est ici arithmétique raison $r=-3$.
   On en déduit que : pour tout entier n, $u_n = -4 - 3n$.
2. $\begin{cases} v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = v_n + 7 \end{cases}$: la suite (v_n) est ici arithmétique de raison $r=7$.
   Comme elle commence à v_1, on en déduit que pour tout entier naturel non nul : $v_n = v_1 + (n-1).7 = 7n - 6$.
3. La formule à retenir pour la somme des termes d'une suite arithmétique est :
   $S = (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

Ainsi : $\sum_{k=0}^{11} u_k = 12 \times \dfrac{-4+(-4-33)}{2} = 12 \times \dfrac{-41}{2} = -41 \times 6 = -246$, et :

$\sum_{k=1}^{12} v_k = 12 \times \dfrac{1+(7 \times 12 - 6)}{2} = 6 \times 79 = 472.$

4. La suite (w_n) étant arithmétique, on a pour tout entier naturel n : $w_n = w_0 + n \times r$.
En particulier :
$393 = w_{80} = w_0 + 80r$, et $133 = w_{15} = w_0 + 15r$.Les deux réels w_0 et r sont donc solutions du système lnéaire :
$$\begin{cases} w_0 & +15r & = 133 \\ w_0 & + \quad 80r & = 393 \end{cases} \iff \begin{cases} w_0 & +15r & = 133 \\ & 65r & = 260 \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} w_0 & = 133 - 60 = 73 \\ r & = 4 \end{cases}.$$
Ainsi : pour tout entier n, $w_n = 73 + 4n$.
D'après la formule rappelée plus haut : $S_{80} = \sum_{k=0}^{80} w_k = 81 \times \dfrac{73+393}{2} = 81 \times 233.$

5. Soit la suite définie par : $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

   a) D'après la relation de récurrence définissant la suite : $u_1 = \dfrac{4u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{19}{7}$.

   $$u_2 = \frac{4u_1 - 1}{u_1 + 2} = \frac{4.\frac{19}{7} - 1}{\frac{19}{7} + 2} = \frac{69}{7} \times \frac{7}{33} = \frac{23}{11}.$$

   b) Pour étudier cette suite, on définit la suite auxiliaire (v_n) par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   On démontre que cette suite est arithmétique en vérifiant que la différence $v_{n+1} - v_n$ est constante, quel quesoit l'entier n.
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 2}} - \frac{1}{u_n - 1} =$$
   $$\frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1}$$
   $$= \frac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3}.$$
   La suite (v_n) est donc arithmétique, de raison $r = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme : $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$.

   c) On en déduit l'expression explicite de v_n pour tout entier n : $v_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}n$.
   Il reste inverser la relation : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \iff \dfrac{1}{v_n} = u_n - 1 \iff u_n = 1 + \dfrac{1}{v_n}$, d'où :

pour tout entier n, $u_n = 1 + \dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{3+4n}{12}} = 1 + \dfrac{12}{3+4n} = \dfrac{4n+15}{4n+3}$.
(on peut ainsi vérifier les trois premières valeurs de la suite (u_n)).

d) D'après l'expression précédente, il est clair que le quotient $u_n = \dfrac{4n+15}{4n+3}$ n'est jamais égal à 1, ce qui garantit la bonne définition de $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Exercice 20 **(énoncé)**

1. La suite (u_n) est, d'après la relation de récurrence : $u_{n+1} = 3u_n$, vraie pour tout entier n de $\mathbb{N}$, géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 50$.
   On peut donc écrire : pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n = 50 \times 3^n$.

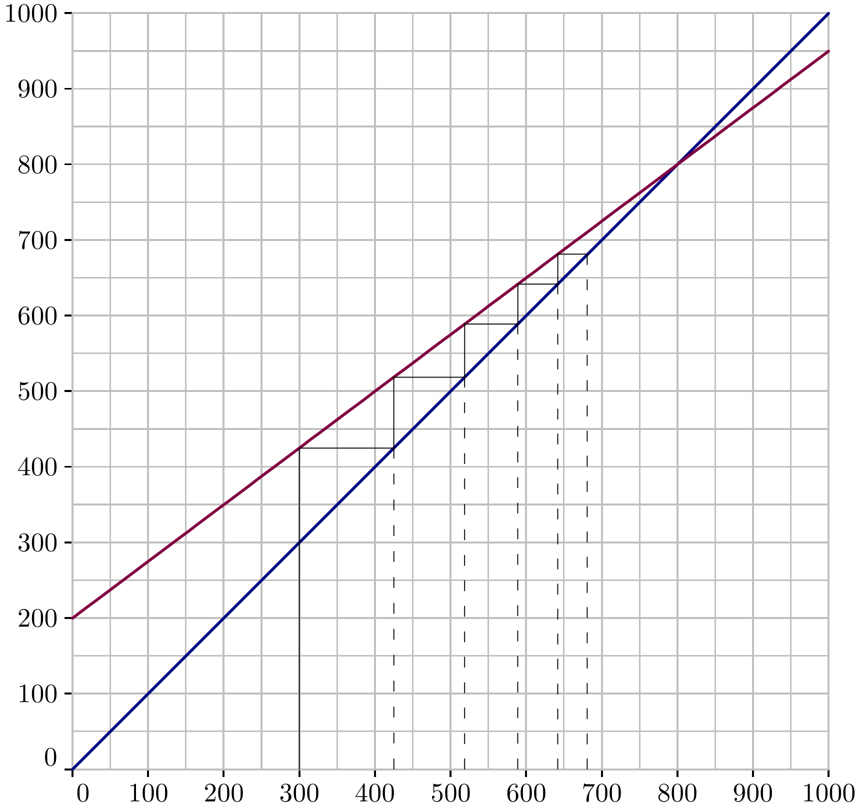
   On connaît aussi la formule donnant la valeur de la somme des premiers termes de cette suite :
   $$\text{somme géométrique (de raison} \neq 1) = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$
   Donc ici : $S_{25} = \displaystyle\sum_{k=0}^{25} u_k = 50 \times \frac{1 - 3^{25+1}}{1-3} = 25 \times (3^{26} - 1)$.

2. Là encore, la relation de récurrence : $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$. Le fait que la relation soit vraie pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ seulement, signifie que cette suite commence, cette fois, au rang $n = 1$. On dispose donc dans ce cas, de la formule : $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ (attention à l'exposant donc !), vraie pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.
   On ne connaît pas ici v_1, mais on peut écrire que : $v_7 = v_1 \times q^6 \iff v_1 = \dfrac{v_7}{q^6}$ pour obtenir :
   $v_1 = \dfrac{3}{(-\frac{1}{2})^6} = \dfrac{3}{\frac{1}{64}} = 3 \times 64 = 192$, d'où :
   Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = 192 \times 3^{n-1} = 64 \times 3^n$.
   Toujours selon la formule rappelée ci-dessus :
   $S_{16} = \sum\limits_{k=1}^{16} v_k = 192 \times \dfrac{1 - (-\frac{1}{2})^{16}}{1 - (-\frac{1}{2})} = 192 \times \dfrac{2}{3} \times \left(1 - \dfrac{1}{2^{16}}\right) = 128 \times \left(1 - \dfrac{1}{2^{16}}\right)$.

Exercice 21 **(énoncé)**

Exercice 22 **(énoncé)**

1. On rappelle brièvement ici, le principe de construction des termes successifs de la suite :
   Puisque $u_{n+1} = 0,75 \times u_n + 200$ pour tout entier n, le réel u_1 est donc l'image de $u_0 = 300$ par la fonction affine $f : x \mapsto 0,75x + 200$. On place donc u_0 sur l'axe des abscisses, et on prend le point de la droite représentant f, d'abscisse u_0. Le réel u_1 se lit alors en ordonnée ; pour le récupérer sur l'axe des abscisses, on prend cette fois le point de la droite $D : y = x$ d'ordonnée u_1 : il aura aussi pour abscisse u_1 ! On peut alors construire selon le même principe, $u_2 = f(u_1)$, puis $u_3 = f(u_2)$, et ainsi de suite...



On lit ainsi : $u_1 = 425,\ u_2 \approx 519,\ u_3 \approx 589,\ u_4 \approx 641,\ u_5 \approx 681.$

La construction des premiers termes suggère que la suite (u_n) est croissante et convergente, sa limite correspondant à l'abscisse du point d'intersection des deux droites du schéma, qui semble être 800.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 800$.

   a) On démontre que la suite (v_n) est géométrique en obtenant une relation de récurrence du type : $v_{n+1} = q \times v_n$, où q est un réel constant. Ici, on sait que pour tout entier n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = 0,75 \times u_n + 200 - 800 = 0,75 \times (v_n + 800) - 600 = 0,75 \times v_n$ car $0,75 \times 800 = 600$.

   La suite (v_n) est donc bien géométrique, de raison $q = 0,75 = \dfrac{3}{4}$, et de premier terme : $v_0 = u_0 - 800 = -500$.

   b) Au vu des données précédentes, on dispose de l'expression : $v_n = -500 \times (0,75)^n$ pour tout enier n.
   Mais comme $v_n = u_n - 800 \iff u_n = 800 + v_n$, on obtient aussi : $u_n = 800 - 500 \times (0,75)^n$, pour tout entier n.

   c) On sait que puisque $0,75$ est *strictement* compris entre 0 et 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,75)^n = 0$.
   Par somme et produit de limites, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 800 - 500 \times 0 = 800$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est bien convergente, de limite 800.

3. Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2017, il y avait 300 abonnés.
On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75% des abonnés renouvellent leur abonnement.
On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année $2017+n$; on a donc $u_0 = 300$ et $u_{n+1} = 0,75 \times u_n + 200$.
   a) On cherche ici à trouver un entier n tel que :
   $u_n \geqslant 700 \iff 800 - 500 \times (0,75)^n \geqslant 700 \iff 100 \geqslant 500 \times (0,75)^n \iff (0,75)^n \leqslant \dfrac{1}{5}$
   $\iff n\ln(0,75) \leqslant \ln(\frac{1}{5}) = -\ln(5) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(5)}{\ln(0,75)}$; le sens de l'inégalité change à cette dernière étape, car $\ln(0,75) < 0$ (vu que $0 < 0,75 < 1$). Comme $-\dfrac{\ln(5)}{\ln(0,75)} \approx 5,59$, et qu'on cherche un nombre entier, on peut conclure que le nombre d'abonnés dépasse 700 pour la première fois, lors de la sixième année, c'est-à-dire en 2020.
   b) L'expression explicite : $u_n = 800 - 500 \times (0,75)^n$ fait clairement apparaître que u_n restera toujours inférieur à 800 ; il est donc impossible que la salle de spectacle finisse par accueillir 1000 abonnés dans ces conditions.

Exercice 24 **(énoncé)**

Dans une zone humide protégée, on s'intéresse à la population d'une espèce locale de grenouille.

On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$(\mathcal{R}) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}\,(P_{n+1} - P_n).$$

On suppose que $P_0 = 40000$ et $P_1 = 60000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Accroissement de la population la première année : $P_1 - P_0 = 60000 - 40000 = 20000$.
Accroissement de la population la deuxième année : $P_2 - P_1 = \dfrac{1}{2}(P_1 - P_0) = 10000$. La troisième année, l'accroissement est deux fois moindre : $P_3 - P_2 = \dfrac{1}{2}(P_2 - P_1) = 5000$.
On en déduit : $P_2 = 10000 + P_1 = 70000$, et $P_3 = 5000 + P_2 = 75000$.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

   (a) Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = (P_{n+2} - P_{n+1}) = \dfrac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) = \dfrac{1}{2}U_n$, ce qui prouve tout naturellement que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Comme $U_0 = P_1 - P_0 = 20000$, on dispose donc de l'expression explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 20000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) Pour tout entier n : $V_{n+1} - V_n = P_{n+2} - \frac{1}{2}P_{n+1} - (P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n) = (P_{n+2} - P_{n+1}) - \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n)$
$= \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) - \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) = 0$ d'après la relation $(\mathcal{R})$!
On en conclut que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *constante*, et par conséquent :
$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0 = P_1 - \frac{1}{2}P_0 = 40000.$

(c) Pour tout entier naturel n :

$$2(V_n - U_n) = 2(P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n - (P_{n+1} - P_n)) = 2.(\frac{1}{2}P_n)) = P_n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = 2\left(40000 - 20000.\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(d) Étant donné que $-1 < \frac{1}{2} < 1$, les propriétés des suites géométriques permettent d'écrire : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, et donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = 2 \times 40000 = 80000$$

La population de grenouilles (dont l'accroissement est divisé par 2 chaque année !) finit donc par se stabiliser autour de 80000 individus.

Exercice 25 **(énoncé)**

Déterminer le sens de variation d'une suite, c'est dire pour quels entiers on a $u_{n+1} \geqslant u_n$, ou le contraire.
On étudie alors traditionnellement ces variations, en cherchant à déterminer le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$. D'autres méthodes existent bien sûr, qu'on étudiera tout au long de l'année.

a) Pour tout entier n :
$u_{n+1} - u_n = 5(n+1)^2 + 3(n+1) - (5n^2 + 3n) = 5(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 - 5n^2 - 3n = 10n + 8 > 0$, donc la suite (u_n) est ici croissante (strictement).

b) Pour tout entier n :
$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, donc la suite (u_n) est ici croissante.

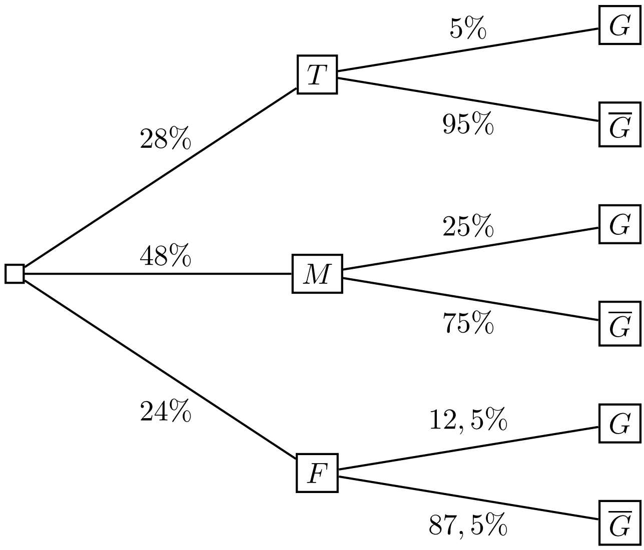
c) Pour tout entier n :
$u_{n+1} - u_n = -7 < 0$, cette suite qui est en fait arithmétique, est décroissante ; on remarque que cela tient au fait que sa raison, qui est $r = -7$, est strictement négative.

d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2}u_n - u_n = \frac{1}{2}u_n$. Pour conclure ici,il faudrait donc connaître le signe de u_n. Il se trouve qu'on est ici en présence d'une suite géométrique de premier terme 3 positif, et de raison $q = \frac{3}{2}$ positive aussi. Il apparaît donc cohérent d'affirmer que tous les termes u_n sont positifs (on apprendra à le prouver très rigoureusement !) et donc que $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n, ce qui permet de conclure que la suite (u_n) est ici croissante.

e) Pour tout entier n :
$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2 + 1}{2} - u_n = \frac{(u_n)^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2}$ qui et toujours positif (à cause du carré), la suite (u_n) est donc, encore une fois, croissante.

Exercice 26 **(énoncé)**

1. Les données de l'énoncé permettent d'obtenir l'arbre pondéré suivant :



Remarque : on a aussi présenté ici les résultats des calculs effectués dans les questions suivantes.

2. Les trois événements (T, M, F) forment une *partition de l'univers*, appelée aussi *système complet d'événements*. Par conséquent :
$P(F) = 1 - P(T) - P(M) = 1 - \frac{28}{100} - \frac{48}{100} = \frac{24}{100}$.
$P(F \cap G) = P(F) \times P_F(G) = \frac{24}{100} \times \frac{12,5}{100} = \frac{300}{10000} = \frac{3}{100}$.

3. Attention à bien lire l'énoncé ! La valeur donnée est : $P(M \cap G) = 12\%$, et non pas $P_M(G)$; on parle en effet d'un acheteur ayant choisi un portable **et** l'extension de garantie.
La probabilité demandée est d'ailleurs : $P_M(G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)} = \frac{12}{100} \times \frac{100}{48} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$, ou 25%.

4. La *formule des probabilités totales*, appliquée avec le système complet d'événements (T, M, F) donne :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T \cap G) + P(F \cap G) + P(M \cap G) \\ &= \frac{28}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{12}{100} + \frac{3}{100} \\ &= \frac{140 + 1200 + 300}{10000} = \frac{1640}{10000} = 0,164 \end{aligned}$$

5. On cherche ici la probabilité : $P_{\overline{G}}(F)$, qui cherche à établir la probabilité d'un événement *antérieur* (F), sachant qu'un événement postérieur est réalisé :
   Il faut pour cela commencer par écrire : $P_{\overline{G}}(F) = \dfrac{P(F \cap \overline{G})}{P(\overline{G})}$,où :
   $P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 0,836$, et $P(F \cap \overline{G}) = P(F) - P(F \cap G) = 0,24 - 0,03 = 0,21$.
   D'où : $P_{\overline{G}}(F) = \dfrac{0,21}{0,836} = \dfrac{210}{836} = \dfrac{105}{416}(\approx 0,252)$.

6. Étant donné que la probabilité qu'un acheteur choisisse la garantie est $0,164$: lorsque 1000 acheteurs font leur choix (a priori de façon indépendante), le nombre de garantie souscrites suit alors la *loi binomiale* de paramètres $(1000, 0.164)$. En moyenne, il y a donc $1000 \times 0,164 = 164$ garanties souscrites pour 1000 acheteurs.
   La recette supplémentaire moyenne générée par ces garanties est donc : $164 \times 50 = 8200$ €.

Exercice 27 **(énoncé)**

On introduit tout de suite, comme le suggère l'énoncé, les événements :

- ⋆ $A =$ « le candidat est admis au Bac »
- ⋆ $R =$ « le candidat avait révisé »
- ⋆ $M =$ « le candidat a menti »

Les données de l'énoncé fournissent directement les probabilités suivantes :
$P(R) = \dfrac{3}{4} = 0.75$, $P_R(A) = 0.9$, $P_{\overline{R}}(A) = 0.2$

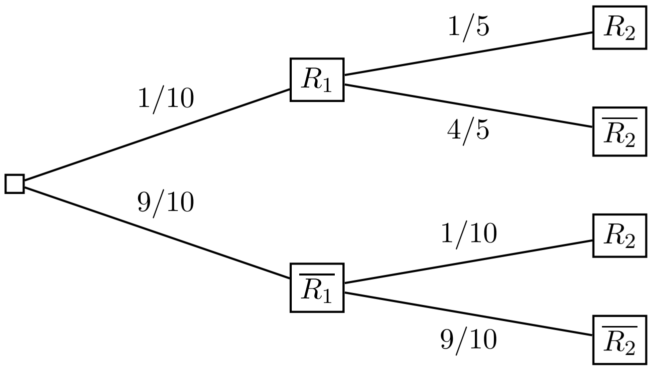
1. La probabilité que le candidat soit admis et n'ait pas révisé est : $P(A \cap \overline{R})$, à ne pas confondre avec la probabilité *conditionnelle* $P_{\overline{R}}(A)$! !
   Le lien entre les deux vient de la formule :
   $P_{\overline{R}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} \iff P(A \cap \overline{R}) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(A) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{20} = 5\%$.
2. La probabilité que le candidat soit admis et ait révisé est : $P(A \cap R) = P(R) \times P_R(A) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{27}{40} = 67.5\%$.
3. La probabilité que le candidat soit recalé et n'ait pas révisé est $P(\overline{A} \cap \overline{R})$.
   Pour la calculer, on peut remarquer que puisque $P_{\overline{R}}(A) = 0.2$, on a aussi $P_{\overline{R}}(\overline{A}) = 1 - P_{\overline{R}}(A) = 0.8$, car les probabilités conditionnelles vérifient toutes les propriétés d'une probabilité ! Cela permet d'écrire :
   $P(\overline{A} \cap \overline{R}) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(\overline{A}) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8}{10} = 0.2 = 20\%$.

4. Un candidat admis pouvait avoir révisé... ou pas ! Il s'agit ici d'un cas très simple d'utilisation de la *formule des probabilités totales*, avec la partition de l'univers : $(R, \overline{R})$ (aussi appelée *système complet d'événements*), elle s'écrit :
$P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) = 0.05 + 0.675 = 0.725$, soit 72.5% des candidats. Assurément pas un taux "moderne" de réussite !
5. La probabilité demandée ici est $P_{\overline{A}}(R)$, qui n'est pas donnée par l'énoncé ; il s'agit en fait d'une probabilité "a posteriori", puisqu'on cherche à évaluer la probabilité d'un événement antérieur à celui qui est supposé réalisé.
Le seul moyen de la calculer, est de revenir à la définition de la probabilité conditionnelle :
$P_{\overline{A}}(R) = \dfrac{P(\overline{A} \cap R)}{P(\overline{A})}$, où :
$P(\overline{A} \cap R) = P(R) \times P_R(\overline{A}) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{40} = 0.025$ (on a inversé le conditionnement pour calculer la probabilité), et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.275$.
D'où : $P_{\overline{A}}(R) = \dfrac{0.025}{0.275} \approx 0.091$, soit $9,1\%$.
6. Les candidats "menteurs" (le terme est peut-être un peu fort !) sont ceux qui :
$\star$ ont révisé <u>et</u> sont admis, car ils prétendent y être allés les mains dans les poches,
$\star$ et ceux qui n'ont pas révisé et sont recalés, car ils prétendent avoir révisé.
Ce qui amène à la description suivante : $M = (A \cap R) \cup (\overline{A} \cap \overline{R})$, réunion de deux événements incompatibles, d'où :
$P(M) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap \overline{R}) = 0.675 + 0.2 = 0.875$, soit 87.5% des candidats !!
7. On cherche ici la probabilité $P_A(M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(A)}$.
Parmi les "menteurs", ceux qui sont admis sont ceux qui ont révisé ; en termes d'événements, cela s'écrit :
$A \cap M = A \cap \big((A \cap R) \cup (\overline{A} \cap \overline{R})\big) = (A \cap A \cap R) \cup (A \cap \overline{A} \cap \overline{R}) = A \cap R \cup \varnothing = A \cap R$.
Bref :
$P_A(M) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(A)} = \dfrac{0.675}{0.725} \approx 0.931$, soit 93.1%.
8. On cherche ici à inverser le conditionnement en calculant : $P_M(A) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(A \cap R)}{P(M)} = \dfrac{0.675}{0.875} \approx 0.771$, soit 77.1%.
9. On cherche enfin la probabilité : $P_{\overline{M}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{M})}{P(\overline{M})}$.
Les candidats admis qui disent la vérité... sont ceux qui n'avaient pas révisé ! Le même type d'opérations sur les ensembles qu'à la question 7 montrerait d'ailleurs que : $\overline{M} \cap A = \overline{R} \cap A$, et :
$P_{\overline{M}}(A) = \dfrac{P(\overline{R} \cap A)}{P(\overline{R})} = \dfrac{0.05}{0.25} = 0.2$, soit 20%.
La question finale est très intéressante : sachant que $P_M(A) = 77.1\%$, et $P_{\overline{M}}(A) = 20\%$, il semblerait que le calcul prouve que mentir augmente les chances d'admission au bac. Sauf que... de quel mensonge parle-t-on ici ? Les candidats ont pu dire ou pas la vérité,

concernant leurs révisions (et seulement ce fait), *après* avoir eu connaissance des résultats. Cette relation de causalité montre en fait que les deux probabilités conditionnelles concernées ici, n'ont pas de réel intérêt statistiquement parlant... et qu'il vaut mieux éviter de les mettre entre les mains d'un journaliste en mal de scoop !

Exercice 28 **(énoncé)**

1. Les données de l'énoncé permettent de construire l'arbre pondéré suivant :



On a introduit les événements R_1 : « on a obtenu une case rouge au premier tour de roue », R_2 défini de façon analogue, et leurs événements contraires.

2. L'événement E s'écrit donc : $E = R_1 \cap R_2$, et le calcul de probabilité est :

$$P(E) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = 0,02.$$

L'événement F s'écrit quant à lui : $F = (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)$. Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles/disjoints, donc :

$P(F) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(\overline{R_2}) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{50} + \dfrac{9}{100} = \dfrac{17}{100} = 0,17.$

On a bien obtenu les résultats attendus.

3. a) Les calculs précédents permettent de déduire le loi de la variable aléatoire X :

   Il y a égalité des événements : $E = [X = 10]$, $F = [X = 2]$, donc $P(X = 10) = 0,02$ et $P(X = 2) = 0,17$. Et pour finir le calcul de la loi : $P(X = 0) = 1 - P(X = 10) - P(X = 2) = 1 - 0,02 - 0,17 = 0,81$.

k	0	2	10
$P(X = k)$	$0,81$	$0,17$	$0,02$

   b) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

   $$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 2 \times P(X = 2) + 10 \times P(X = 10) = 0,34 + 0,2 = 0,54.$$

   On peut interpréter ce résultat comme le *gain moyen* d'une partie (lorsqu'on en joue un grand nombre).

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes.

a) La forme du résultat obtenu suggère de considérer l'événement contraire à : « Le joueur lance au moins une fois la roue B », qui est : « Le premier tour de la roue A donne n fois une case noire ».
La présentation précise du calcul sera revue en ECE1, mais on peut déjà citer l'indépendance des parties et le fait qu'on obtient une case noire au premier tour de roue avec la probabilité $0,9$ pour en déduire que :
$P($"n cases noires au premier tour en n parties$) = (0,9)^n$, d'où par événement contraire : $p_n = 1 - (0,9)^n$.

b) On sait que $0 < 0,9 < 1$, donc d'après le théorème sur la limite d'une suite géométrique : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,9)^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1 - 0 = 1$.
Ce résultat signifie qu'à long terme, il deviendra *presque-certain* que la première roue tombe au moins une fois sur une case rouge.

c) Pour répondre à la question posée ici, on résout l'inéquation :
$p_n > 0,9 \iff 1-(0,9)^n > 0,9 \iff 0,1 > (0,9)^n \iff \ln(0,1) > n\ln(0,9) \iff n > \dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)}$ puisque $\ln(0,9) < 0$.
L'application numérique donne : $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,85$.
On en déduit que la probabilité de faire tourner au moins une fois la roue B, devient supérieure à 90% à partir de 22 parties.

Exercice 29 (énoncé)

Partie A.

1. L'écriture : $[X \leqslant 410] = [X < 390] \cup [390 \leqslant X \leqslant 410]$ où les deux événements dont on fait la réunion sont disjoints, permet d'écrire :
$P(X \leqslant 410) = P(X < 390) + P(390 \leqslant X \leqslant 410) \iff P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leqslant 410) - P(X < 390)$ qui vaut aussi $P(X \leqslant 410) - P(X \leqslant 390)$, puisque X est une variable à densité.
Le tableau de valeurs donne donc : $P(390 \leqslant X \leqslant 410) \approx 0,818 - 0,182 = 0,636$.
2. D'après l'énoncé, un pain est commercialisable avec la probabilité :
$p = P(X \geqslant 385) = 1 - P(X < 385) = 1 - P(X \leqslant 385) \approx 0,914$ (soit 91,4%).
3. D'après le cours sur la loi normale, on sait que puisque X suit la loi normale d'espérance $m = 400$ et d'écart-type σ, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-400}{\sigma}$ suit la loi normale centrée, réduite.
On voudrait ici que :
$P(X \geqslant 385) = 0,96 \iff P(X \leqslant 385) = 0,04 \iff P(X - 400 \leqslant -15) = 0,04$
$\iff P\left(\dfrac{X-400}{\sigma} \leqslant -\dfrac{15}{\sigma}\right) = 0,04$.
D'après l'indication de l'énoncé, il suffit de choisir σ tel que : $-\dfrac{15}{\sigma} \approx -1,751 \iff \sigma \approx \dfrac{15}{1,751} \approx 8,57$.

Partie B.

1. D'après le cours : pour n assez grand (ce qui est le cas ici), l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de pains commercialisables est :
$$\left[p - 1,96.\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96.\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right],$$
où $p = 96\%$ et $n = 300$. Tous calculs faits, on obtient l'intervalle $[0.938, 0.982]$.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables, soit une proportion de $\frac{283}{300} \approx 0.943$. Cette valeur appartient bien à l'intervalle de fluctuation précédemment calculé, on peut donc considérer que, bien que l'objectif de 96% de pains commercialisables ne soit pas atteint sur cet échantillon, on reste dans des proportions acceptables (appartenant à l'intervalle de fluctuation) au regard des objectifs fixés.