CORRECTION REDUCTEUR

Q1) On a l'équation différentielle suivante : $f.\omega_3(t) + J.\dfrac{d\omega_3(t)}{dt} = \dfrac{\eta}{r}.C_m(t)$

On transpose dans le domaine de Laplace en prenant les ***conditions initiales nulles***. En effet une fonction de transfert traduit l'évolution du système à partir d'une position d'équilibre prise comme référence, les conditions initiales sont donc nulles.

On a dans Laplace : $f.\Omega_3(p) + J.p.\Omega_3(p) = \dfrac{\eta}{r}.C_m(p)$ soit $\Omega_3(p).\left(f.+J.p\right) = \dfrac{\eta}{r}.C_m(p)$

d'où $F(p) = \dfrac{\Omega_3(p)}{C_m(p)} = \dfrac{\eta}{r}.\dfrac{1}{f+J.p}$

et la forme canonique suivante : $\boxed{F(p) = \dfrac{\Omega_3(p)}{C_m(p)} = \dfrac{\dfrac{\eta}{r.f}}{1+\dfrac{J}{f}.p} = \dfrac{K}{1+\tau.p}}$

On en déduit le gain statique du système $\boxed{K = \dfrac{\eta}{r.f}}$ et la constante de temps $\boxed{\tau = \dfrac{J}{f}}$

Applications numériques :

- *Fonction de transfert :* $F(p) = \dfrac{\dfrac{0{,}8}{0{,}1.0{,}1}}{1+\dfrac{8.10^{-3}}{0{,}1}.p} = \dfrac{80}{1+0{,}08.p}$ soit $\boxed{F(p) = \dfrac{\Omega_3(p)}{C_m(p)} = \dfrac{80}{1+0{,}08.p}}$

- *Gain statique :* $\boxed{K = \dfrac{0{,}8}{0{,}1.0{,}1} = 80 \;\; s.kg^{-1}.m^{-2} \quad ou \quad 80 \; rad.s^{-1}.m^{-1}.N^{-1}}$

Unité de K :

- soit on utilise la formule $K = \dfrac{\eta}{r.f}$ avec $\boldsymbol{\eta}$ et ***r*** sans dimension et ***f*** en ***kg.m².s⁻¹*** d'où ***K*** en ***s.kg⁻¹.m⁻²***

- soit on utilise le fait que $K = \dfrac{sortie}{entrée} = \dfrac{rad/s}{m.N}$ d'où ***K*** en ***rad.s⁻¹.m⁻¹.N⁻¹***

On a bien la même chose car on a une relation entre force et masse par le ***PFD*** : « $\boldsymbol{\Sigma}$***Forces = M Γ*** »
d'où « $\boldsymbol{N \Leftrightarrow kg.m.s^{-2}}$ » et le radian est sans dimension.

- *Constante de temps :* $\boxed{\tau = \dfrac{8.10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}08 \; s}$

Q2) ***<u>Première méthode : résultats de cours</u>***

Pour un premier ordre (de gain statique ***K***) on sait que la réponse à un échelon d'amplitude ***A = C*** $A = C_{m1}$ tend vers la valeur ***K.A*** donc :

$$\omega_3 = 80\ rad.\,s^{-1}.\,m^{-1}.\,N^{-1}\ .\ 0{,}1\ m.N = 8\ rad/s \qquad \boxed{\omega_3 = 8\ rad/s = 76\ tr/\min}$$

<u>Deuxième méthode : utilisation du théorème de la valeur finale</u>

La fonction de transfert du mécanisme (en boucle fermée) est représentative d'un système du premier ordre, donc stable. On peut donc utiliser le théorème de la valeur finale.

L'entrée temporelle $C_m(t) = C_{m1} = 0{,}1\ m.N$ correspond dans le domaine de Laplace à une entrée en échelon d'amplitude ***0,1*** donc on a :

$$C_m(p) = \frac{C_{m1}}{p} \quad \text{avec } C_{m1} = 0{,}1$$

d'où
$$\lim_{t\to\infty} \omega_3(t) = \lim_{p\to 0} p.\Omega_3(p) = \lim_{p\to 0} \left(p\ .\ \frac{\frac{\eta}{r.f}}{1.+\frac{J}{f}.p}\ .\ \frac{C_{m1}}{p} \right) = \lim_{p\to 0} \left(\frac{\frac{\eta}{r.f}\ .\ C_{m1}}{1.+\frac{J}{f}.p} \right)$$

et finalement :
$$\lim_{t\to\infty} \omega_3(t) = \frac{\eta}{r.f}\ .\ C_{m1}$$

La vitesse angulaire finale de la charge est donc :
$$\boxed{\omega_3 = \frac{\eta}{r.f}\ .\ C_{m1}}$$

<u>Application numérique</u> :
$$\omega_3 = \frac{0{,}8}{0{,}1.0{,}1}\ .\ 0{,}1 = 8 \qquad \text{d'où :} \qquad \boxed{\omega_3 = 8\ rad/s = 76\ tr/\min}$$

<u>Nota :</u> ici on ne s'intéresse pas au sens de rotation donc on prend ***r = + 0,1*** et non ***– 0,1***

Q3) On cherche le temps à partir duquel la vitesse de sortie $\omega_{3/0}(t)$, notée $\omega_3(t)$, atteint ***95%*** de sa valeur finale, cela correspond en fait au temps de réponse à ***5%*** du système.

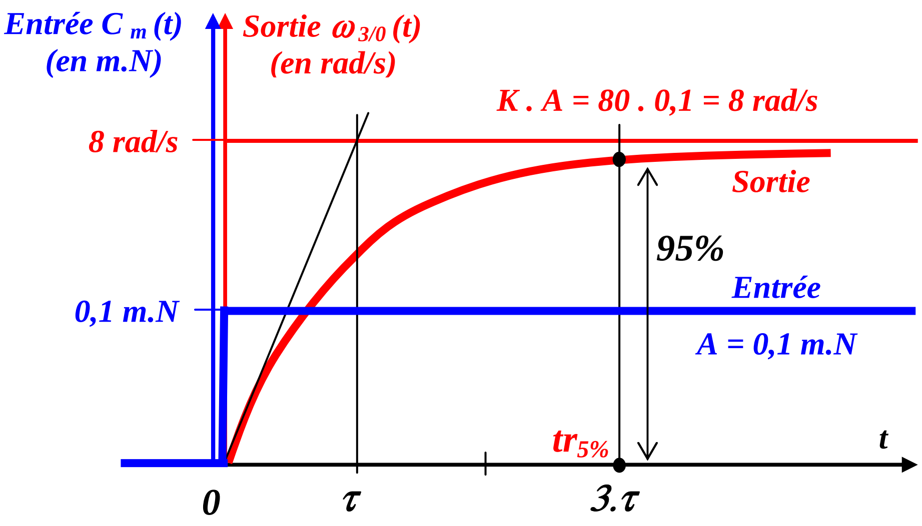
Le système étant un premier ordre on sait que : $tr_{5\%} = 3.\tau$

avec τ la constante de temps du système :
$$F(p) = \frac{\Omega_3(p)}{C_m(p)} = \frac{\frac{\eta}{r.f}}{1.+\frac{J}{f}.p} = \frac{K}{1+\tau.p} \qquad \text{soit} \qquad \tau = \frac{J}{f}$$

d'où
$$\boxed{tr_{5\%} = 3.\frac{J}{f}}$$

<u>Application numérique</u> :
$$\boxed{tr_{5\%} = 3\ .\ \frac{8.10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}24\ s}$$

Q4) On doit en fait tracer la réponse à un échelon pour un système du premier ordre, d'où :



Q5) On a la fonction de transfert suivante : $F(p)=\dfrac{\Omega_3(p)}{C_m(p)}=\dfrac{\dfrac{\eta}{r.f}}{1.+\dfrac{J}{f}.p}$

Avec un signal d'entrée constant et valant C_{m1} dans le domaine temporel.

Cela donne $\dfrac{C_{m1}}{p}$ dans le domaine de Laplace.

d'où : $\Omega_3(p)=\dfrac{\dfrac{\eta}{r.f}}{1+\dfrac{J}{f}.p}.\dfrac{C_{m1}}{p}=\dfrac{\eta.C_{m1}}{r.f}.\dfrac{1}{\dfrac{J}{f}.\left(\dfrac{f}{J}+p\right)}.\dfrac{1}{p}$

Ecrivons cette expression en somme de termes (et non en produit de termes) :

$$\Omega_3(p)=\frac{\eta.C_{m1}}{r.J}.\left(\frac{A}{p+\dfrac{f}{J}}+\frac{B}{p}\right)=\frac{\eta.C_{m1}}{r.J}.\left(\frac{A.p+B.\left(p+\dfrac{f}{J}\right)}{p.\left(p+\dfrac{f}{J}\right)}\right)=\frac{\eta.C_{m1}}{r.J}.\left(\frac{p.(A+B)+B.\dfrac{f}{J}}{p.\left(p+\dfrac{f}{J}\right)}\right)$$

En identifiant on obtient : $\begin{cases}A+B=0\\ B.\dfrac{f}{J}=1\end{cases}$ d'où $B=\dfrac{J}{f}$ et $A=-B=-\dfrac{J}{f}$

On a donc :

$$\Omega_3(p)=\frac{\eta.C_{m1}}{r.J}.\left(\frac{-\dfrac{J}{f}}{p+\dfrac{f}{J}}+\frac{\dfrac{J}{f}}{p}\right)=\frac{\eta.C_{m1}}{r.J}.\frac{J}{f}.\left(\frac{-1}{p+\dfrac{f}{J}}+\frac{1}{p}\right)=\frac{\eta.C_{m1}}{r.f}.\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\dfrac{f}{J}}\right)$$

On sait que la transformée inverse de $\dfrac{1}{p}$ est ***1*** et celle de $\dfrac{1}{p+a}$ est $e^{-a.t}$ d'où :

$$\boxed{\omega_{3/0}(t)=\frac{\eta.C_{m1}}{r.f}.\left(1-e^{-\frac{f}{J}.t}\right)}$$

On en déduit :

- $\lim\limits_{t\to\infty} \omega_{3/0}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\eta.C_{m1}}{r.f}.\left(1-e^{-\frac{f}{J}.t}\right) = \frac{\eta.C_{m1}}{r.f}$ soit $\boxed{\omega_3 = \frac{\eta}{r.f}.C_{m1}}$

- temps à partir duquel on atteint la vitesse précédente à ***5%*** près :

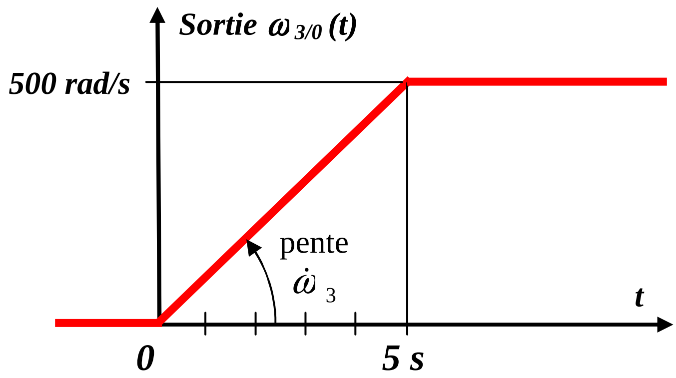
$\omega_3(t) = 0{,}95.\omega_{final} = 0{,}95.\omega_3 = 0{,}95.\frac{\eta}{r.f}.C_{m1}$ d'où $\frac{\eta.C_{m1}}{r.f}.\left(1-e^{-\frac{f}{J}.t}\right) = 0{,}95.\frac{\eta}{r.f}.C_{m1}$

soit $1-e^{-\frac{f}{J}.t} = 0{,}95$ donc $e^{-\frac{f}{J}.t} = 1-0{,}95 = 0{,}05$ $\frac{f}{J}.t = -\ln 0{,}05 = 2{,}99 \approx 3$

et finalement : $\boxed{t = 3.\frac{J}{f} = 3.\tau}$

<u>Conclusion :</u> on retrouve bien les mêmes résultats qu'aux questions ***Q2*** et ***Q3***.

Q6) L'évolution temporelle de la vitesse est la suivante :

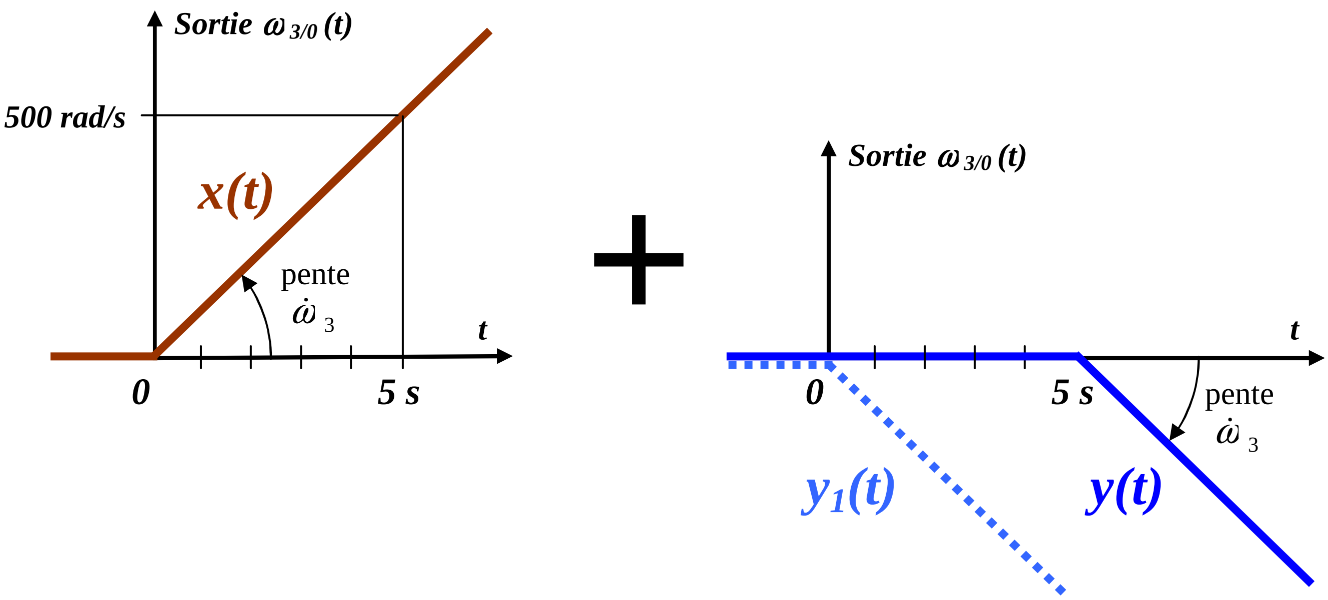


Calcul de $\dot{\omega}_3$ (pente de la courbe) : la phase d'accélération (entre ***0*** et ***5 s***) se fait à accélération constante $\dot{\omega}_3$, d'où :

$$\dot{\omega}_3(t) = constante = \dot{\omega}_3 \quad \text{soit} \quad \omega_3(t) = \dot{\omega}_3.t + \omega_3(t=0) = \dot{\omega}_3.t + 0 = \dot{\omega}_3.t$$

Or à $\boldsymbol{t = 5\ s}$ on a $\omega_3(t) = 500\ rad/s$ d'où finalement : $\boxed{\dot{\omega}_3 = \frac{\omega_3}{t} = \frac{500}{5} = 100\,rad/s^2}$

L'évolution de la vitesse d'entrée est en fait la somme des deux signaux suivants :



Domaine temporel : on a : $\omega_3(t) = x(t) + y(t)$

Le signal $x(t)$ est une droite de pente $\dot{\omega}_3$ et passant par l'origine d'où : $x(t) = 100.t$ à partir de $t = 0$

En utilisant $u(t)$ la fonction d'Heaviside (ou fonction identité) on a : $\boxed{x(t) = 100.t.u(t)}$

De même pour $y_1(t)$ avec une pente négative de **-100 :** $\boxed{y_1(t) = -100.t.u(t)}$

Par ailleurs le signal $y(t)$ correspond à $y_1(t)$ retardé de **5s**, c'est-à-dire à une rampe mais à partir de $t = 5s$, d'où :

$$\boxed{y(t) = 100.(t-5).u(t-5)}$$

Finalement dans le domaine temporel : $\boxed{\omega_3(t) = 100.t.u(t) - 100.(t-5).u(t-5)}$

Domaine de Laplace : on a toujours (par linéarité dans Laplace) : $\Omega_3(p) = X(p) + Y(p)$

Le signal $X(p)$ est une rampe de pente **100**, cela donne : $\boxed{X(p) = \frac{100}{p^2}}$

Le signal $Y_1(p)$ est une rampe de pente **-100**, cela donne : $\boxed{Y_1(p) = -\frac{100}{p^2}}$

Le signal $Y(p)$ correspond au signal $Y_1(p)$ retardé de **5s** d'où d'après le ***théorème du retard*** :

$$\boxed{Y(p) = Y_1(p).e^{-5.p} = -\frac{100}{p^2}.e^{-5.p}}$$

Et finalement dans le domaine de Laplace : $\boxed{\Omega_3(p) = \frac{100}{p^2} - \frac{100}{p^2}.e^{-5.p} = \frac{100}{p^2}.\left(1 - e^{-5.p}\right)}$

Couple moteur d'entrée Cm(p) dans Laplace : on avait $F(p) = \frac{\Omega_3(p)}{C_m(p)} = \frac{\frac{\eta}{r.f}}{1. + \frac{J}{f}.p}$

Ce qui donne :

$$C_m(p) = \Omega_3(p) \cdot \frac{r.f}{\eta} \cdot \left(1 + \frac{J}{f}.p\right) = \Omega_3(p) \cdot \frac{0{,}1 . 0{,}1}{0{,}8} \cdot \left(1 + \frac{8.10^{-3}}{0{,}1}.p\right) = 0{,}0125.\,\Omega_3(p).\left(1 + 0{,}08.p\right)$$

avec : $\Omega_3(p) = \frac{100}{p^2}.\left(1 - e^{-5.p}\right)$

soit $C_m(p) = 0{,}0125 . \frac{100}{p^2}.\left(1 - e^{-5.p}\right).\left(1 + 0{,}08.p\right) = \frac{1{,}25}{p^2}.\left(1 - e^{-5.p}\right).\left(1 + 0{,}08.p\right)$

d'où : $\boxed{C_m(p) = 1{,}25 . \left(\frac{1}{p^2} + \frac{0{,}08}{p} - \frac{e^{-5.p}}{p^2} - \frac{0{,}08 . e^{-5.p}}{p}\right)}$

Couple moteur d'entrée Cm(t) : on déduit de l'expression précédente dans Laplace :

$$C_m(t) = 1{,}25\,.\left\{t.u(t) + 0{,}08.\,u(t) - (t-5).\,u(t-5)\; - 0{,}08.u(t-5)\right\}$$

d'où : $$\boxed{C_m(t) = 1{,}25.\,t.u(t) + 0{,}1.u(t) - 1{,}25\,.\,(t-5).\,u(t-5) - 0{,}1.\,u(t-5)}$$