☞Année concours oblige TOUT est exigible depuis les classes maternelles jusqu'à cette date-ci

1 Les fonctions à deux variables réelles

Tout le programme précédent, dérivées partielles, recherche des extréma.

2 Les Suites

1. Définitons. Types de suites: Suites explicites $u_n = f(n)$, Suites récurrentes, Suites implicites.
2. Exemple de suites calculables :
   (a) Suites arithmético-géométriques (associée à $f :\mapsto f(x) = ax + b$):
   $$u_{n+1} = au_n + b \Rightarrow \begin{cases} u_n = n.b + u_0 \text{ si } a = 1 \\ u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell \text{ avec } \ell = \dfrac{b}{1-a} \end{cases}$$
   (b) Suites homographiques $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ (aucune étude théorique, uniquement sur des exemples numériques):
   Selon les points fixes (solutions de $\ell = \dfrac{a\ell + b}{c\ell + d}$)
   Racines distinctes: Suite auxiliaire $x_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}$ est **géométrique**.
   Racine double: Suite auxiliaire $x_n = \dfrac{1}{u_n - \ell}$ est **arithmétique**.
   (c) Suites Récurrentes linéaires à coefficients constants. Utilisation de l'écriture matricielle $X_n = AX_{n-1}$.
   Applications aux problèmes de dénombrement et aux probabilités.

Nature d'une suite

1. Convergence d'une suite: Définition **epsilonesque**. Suites divergentes. Suites divergentes vers $\pm\infty$.
   $u_n \longrightarrow \ell \iff (u_n - \ell) \longrightarrow 0 \iff |u_n - \ell| \longrightarrow 0$
   Unicité de la limite lorsqu'elle existe. Limites de référence.
2. Opérations et Algèbre des suites convergentes.
3. Limites de référence et comparaison: $q^n \xrightarrow[n\infty]{|q|<1} 0$, $n^\alpha q^n \xrightarrow{|q|<1} 0$, $q^n = \mathrm{o}(n!)$, $n! = o(n^n)$ ...etc.
4. Si $u_n = f(n)$ (suite explicite) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors la suite u_n converge vers ℓ.
   réciproque fausse.
5. **Suites extraites**: Définition.
   Théorème: Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.
   Théorème: Si (u_n) admet une suite extraite divergente ou deux suites extraites de limites différentes alors (u_n) est divergente.
   Théorème(réciproque **timide**): $\left.\begin{array}{l} u_{2n} \to \ell \\ u_{2n+1} \to \ell \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to \ell$.
   En général : si (v_n) et (w_n) sont extraites de (u_n) telles que les termes de (v_n) et (w_n) forment les termes de (u_n) et $\lim\limits_{\infty} w_n = \lim\limits_{\infty} v_n = \ell$ Alors $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell$.
6. Convergence et Ordre dans $\mathbb{R}$:
   (a) Si $u_n < a$ et (u_n) converge vers ℓ alors $\ell \le a$
   (b) Monotonie d'une suite(**à partir d'un certain rang** N).
   (c) **Théorème de la Limite Monotone**: Une suite croissante converge ssi elle est majorée; sa limite vérifie $\forall n;\ u_n \le \ell$ (ou exactement $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$).
   Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
   ☞(Énoncés équivalents pour les suites décroissantes)
   (d) Soit des suites telles que $\forall n \ge N$, $w_n \le u_n \le v_n$, alors:
   (1) $w_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow u_n \longrightarrow +\infty$
   (2) $v_n \longrightarrow -\infty \Rightarrow u_n \longrightarrow -\infty$
   (3) $\left.\begin{array}{l} w_n \longrightarrow \ell \\ v_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \longrightarrow \ell$: Théorème de l'encadrement(des gendarmes)

   (e) **Suites Adjacentes**:
   Théorème-Définition: Si (u_n) et (v_n) sont de monotonies opposées et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
   On a en plus : $\forall n \in \mathbb{N}$: $c_n < \ell < d_n$, où c_n désigne la suite croissante parmi (u_n) et (v_n) et (d_n) la décroissante.
   Exercice Fondamental: Les étudiants doivent connaître le résultat $\sum\limits_{n=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$ (voire $\sum\limits_{1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$, où $\gamma \approx 0.57\cdots$ la constante d'Euler) et savoir le démontrer au besoin.
7. Utilisation des DL pour la recherche des limites de suites.
8. Exemple de suites implicites.
9. Étude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue et $u_0 \in I$ (donné):
   (a) (u_n) est bien définie ssi il existe $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$.
   (b) Les limites éventuelles de (u_n) sont **incluses** dans l'ensemble des points fixes de f. L'ensemble des points fixes de f constituent les points stationnaires de la suite $u_n = f(u_{n-1})$.

(c) Monotonie de f et celle de (u_n):

f **croissante** alors (u_n) $\begin{cases} \text{croissante si } u_1 > u_0 \\ \text{décroissante si } u_1 < u_0 \\ \text{stationnaire si } u_1 = u_0 \text{ (en fait: } u_0 \text{ point fixe)} \end{cases}$

f **décroissante** Dans ce cas $f \circ f$ est croissante. On considère les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. On fait l'étude sur ces deux suites.

(d) Utilisation de l'inégalité des accroissements finis (IAF).

3 Séries .... après les vacances de toussaint

1. **Notation** : $\sum u_n$ série de terme général u_n, suite des somme partielles $S_n = \sum\limits_{n \geq n_0}^{n} u_k$.
   Réciproquement : obtenir u_n à partir de la suite des sommes partielles : $u_n = S_n - S_{n-1}$.
   Convergence : La série $\sum u_n$ converge **ssi** la suite des sommes partielles (S_n) convergence.
   Lorsque la série converge sa limite s'appelle la somme de la série, notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ (**Critère du cancre**) : Si $\lim\limits_{n\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.
2. L'espace des séries convergentes est un **sous espace vectoriel**.
   Somme d'une série convergente et une série divergente est divergente.
3. **Séries de référence** :
   (a) Séries **géométriques** et associés :
   Théorème : La série $\sum\limits_{n=0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas sa somme est $\dfrac{1}{1-q}$.
   Généralisation : séries géométriques "dérivées" et "primitives" : Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $|q| < 1$ alors les séries $\sum q^n$, $\sum n^p.q^n$ et $\sum \dfrac{1}{n^p} q^n$ convergent.
   Expression de la somme : $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} q^n = q^m \dfrac{1}{1-q}$, expressions des sommes des séries dérivées.
   (b) Série **exponentielles** : $\forall x \in \mathbb{R}$; : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$ en particulier $e^{-1} = \dfrac{1}{e} = \sum\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!}$
   (c) Séries **téléscopiques** :
   Si $\forall n \geq n_0$: $u_n = v_{n+1} - v_n$ alors la série $\sum u_n$ converge ssi la suite (v_n) converge et dans ce cas $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = (\lim\limits_{n \to +\infty} v_n) - v_{n_0}$.
   (d) Série de **Riemann** :
   $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$: $\begin{cases} \textbf{converge} \text{ si } \alpha > 1 \\ \textbf{diverge} \text{ vers } +\infty \text{ si } \alpha \leq 1 \end{cases}$
4. Séries à **termes de signe constant** (spécialement à termes positifs)
   (a) **Théorème**: Si $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq 0$ alors la série $\sum u_n$ converge **ssi** la suite des sommes partielles est majorée
   (b) Théorèmes de **comparaison** et de **domination** (positive): Si $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ (resp. $u_n = o(v_n)$) alors $\begin{cases} \sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge} \\ \sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$
   (c) Théorème des **équivalents (positifs)** Si $u_n \underset{n\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ **sont de même nature**.
   (**Attention** : en cas de convergence on peut avoir $\sum\limits_{n \geq n_0}^{+\infty} u_n \neq \sum\limits_{n \geq n_0}^{+\infty} v_n$)
5. Séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang, se ramener au cas positif en étudiant la série de terme général $-u_n$.
6. **Convergence absolue**. Définition, Série semi convergente.
   Théorème : toute série absolument convergente est convergente.
   Le théorème précédent justifie l'intérêt porté au séries à termes positifs.
   Exemple fondamental d'une série semi-convergente $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$

4 Remarques et démonstration exigibles

1. Expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique.
2. La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.
3. (u_n) converge donc elle est bornée.
   Contre exemple indiquant que la réciproque est fausse
4. $\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow 0 \\ (b_n) \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n.b_n) \longrightarrow 0$
5. Définiton-Théorème des suites adjacentes.
6. Utilisation des $DL(\infty)$ pour l'étude des suites.
7. Si f est croissante alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone, son sens de monotonie est déterminé par le signe de $(u_1 - u_0)$ et si f continue et $u_n \to \ell$ alors $\ell = f(\ell)$.
   .... **Après les vacances de toussaint** ....
8. (critère du cancre) $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   Contre exemple indiquant que la réciproque est fausse(i.e. $u_n \to 0$ mais $\sum u_n$ diverge).
9. Si $|q| < 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}; \qquad \sum_{n=m}^{+\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n.q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n.q^n = \frac{q}{(1-q)^2};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2.q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$$

☞: Il faut bien parler de **dérivation formelle** comme première justification puis au besoin dériver $\sum\limits_{k=1}^{k=n-1} x^k = \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}$ et faire un calcul de limite lorsque $n \to +\infty$ (sous la condition $|x| < 1$)

10. **Séries de Riemann**: $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
11. Les étudiants doivent connaître, sur le bout des doigts les D.L. des fonction usuelles, et les utiliser pour la recherche d'équivalents ou de dominant de u_n terme général de la série sous étude.
12. Techniques de sommation par téléscopage et/ou changement d'indexation.
13. Toute série convergente absolument est convergente i.e. $\sum |u_n| \Rightarrow \sum u_n$ converge.
    Exemple d'une série semi convergente.