☞Année concours oblige TOUT est exigible depuis les classes maternelles (opérations sur les fractions, puissances. . .) jusqu'à cette date-ci

1 Développements limités

Définition de voisinage (resp. voisinage épointé) d'un point $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

1.1 Négligeabilité et Équivalence

Comparaison des fonction au voisinage d'un point a (localement). Soit f et g deux fonctions définies sur $V \in \mathcal{V}(a)$ (possible $a \notin V$)

1. **Définition**: f est **négligeable** devant (ou dominée par) g au voisinage de a, et l'on note $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ ou bien $f \underset{a}{\ll} g$, ssi il existe une fonction $V \overset{\varepsilon}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f(x) = \varepsilon(x).g(x) \\ \textbf{avec } \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$.

   Cette définition est équivalente à la relation $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ si g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.
2. **Définition** : f est **équivalente** à g au voisinage de a, et l'on note $f \underset{a}{\sim} \mathrm{o}(g)$, ssi il existe une fonction $V \overset{u}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f(x) = u(x).g(x) \\ \textbf{avec } \lim\limits_{x\to a} u(x) = 1 \end{cases}$.

   Cette définition est équivalente à la relation $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ si g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a.
3. Propriétés de la relation $f = \mathrm{o}(g)$ et de $f \sim g$.

1.2 Développements limités

1. **Définition**: f admet un $DL_n(a)$ ssi il existe un polynôme P de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} P(x) + R(x) & \text{où } \dfrac{R(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ P(x) + \varepsilon(x).(x-a)^n & \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ P(x) + \mathrm{o}((x-a)^n) \end{cases}$$

2. **unicité** du DL.
3. **Formule de Taylor** au voisinage de $a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \underset{x\approx a}{=} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

   Le changement de variable $u = x - a$ pour se ramener à un DL en 0.
4. DL des fonctions usuelles (fonctions trigo **hors programme**) au voisinage de 0.

Formules de référence au voisinage de $0 (u \to 0)$	
$e^u \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u^k}{k!} + \mathrm{o}(u^n)$ $e^u \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{6}u^3 + \cdots$	$\ln(1+u) \underset{0}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} u^k + \mathrm{o}(u^n)$ $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{3}u^3 - + \cdots$
Binôme Généralisé: $(1+u)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \dfrac{\alpha.(\alpha-1).\ldots.(\alpha-n+1)}{n!} + \mathrm{o}(u^n)$	
Cas particuliers de $(1+u)^\alpha$	
$\dfrac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \mathrm{o}(u^n)$	$\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n + \mathrm{o}(u^n)$
$\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \cdots$

5. **Opérations** sur les DL : Somme, produit, composition.
   L'inverse et le quotient s'obtiennent en transformant l'écriture à un produit de la forme $v.\dfrac{1}{1+u}$ où $u \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
6. DL et primitives (DL et dérivation).
7. **DL au voisinage de** $+\infty$ **(resp.** $-\infty$**)** se ramène à un DL au voisinage de 0^+ (resp. (0^-)) par le changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$

Applications du DL

1. Calcul des limites de suites et/ou des fonctions.
2. **Recherche des équivalents** de suites et/ou des fonctions
   Si f admet P comme $DL_n(a)$ alors $f(x) \underset{a}{\sim} p_k(x-a)^k$ où $p_k(x-a)^k$ est le monôme du plus petit degré de P.(i.e. p_k est le premier coefficient non nul de P)
3. Recherches des tangentes en $(a; f(a))$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ et préciser la position relative courbe/tangente.

$$f(x) \underset{a}{=} \alpha + \beta(x-a) + \delta(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n) \Rightarrow \begin{cases} y = \alpha + \beta(x-a) \text{ tangente} \\ \text{sign}(\delta(x-a)^n) \text{ détermine position } \mathcal{C}_f/Tang. \end{cases}$$

4. Recherche des branches infinies et éventuellement des droites asymptotes à la courbe d'une fonction (et en prime préciser la position relative Courbe/Asymptote).

$$f(x) \underset{\pm\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x^n} + \mathrm{o}(\frac{1}{x^n}) \Rightarrow \begin{cases} y = ax + b \text{ asymptote} \\ \text{sign}(\frac{c}{x^n}) \text{ détermine position } \mathcal{C}_f/Asymp. \end{cases}$$

2 Fonctions réelles à deux variables

On se limite **à des exemples pratiques** sans trop de théorie. Le but de ce chapitre est principalement le calcul des extrema locaux et/ou globaux via les dérivées partielles premières (recherche des points critiques) et secondes (pour déterminer la **nature** des points critiques éventuels).

2.1 Notions de Topologie

Disatnce, boules ouvertes, boules fermées. Ensembles ouverts, ensembles fermés, voisinages d'un point.

2.2 Limite et continuité

f admet le réel ℓ comme limite en $(a,b) \in \mathcal{U}$ **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall (x;y) : \delta((x,y);(a,b)) \leq \eta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

Opérations sur les limites ou les fonctions continues : somme, produit, quotient et composée...etc.
Recherche et **représentation graphique** de domaines de définition (de continuité, dérivabilité). On se limite à des parties de $\mathbb{R}^2$ définies par $(ax+by+c)(a'x+b'y+c') \gtreqless 0$

2.3 Fonction partielles

Si $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ avec $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $A(a;b) \in \mathcal{U}$. Alors

$f_x : x \mapsto f(x,b)$ où la variable est selon x l'autre constante
$f_y : y \mapsto f(a,y)$ où la variable est selon y l'autre constante

2.4 Dérivées partielles

f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en $(a;b)$ selon x (resp y) ssi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x;b) - f(a;b)}{x-a}; \qquad (\text{ ou } \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h;b) - f(a;b)}{h})\text{existe}$$
$$\lim_{y\to b} \frac{f(a;y) - f(a;b)}{y-b}; \qquad (\text{ ou } \lim_{h\to 0} \frac{f(a;b+h) - f(a;b)}{h})\text{existe}$$

Notations : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ou $f'_x(a,b)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ ou $f'_y(a,b)$).
Dérivée partielles secondes : On réitère le procédé

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^2$) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ ssi f'_x et f'_y sont continues sur $\mathcal{U}$.
Théorème de Schwarz : Si f est de classe $\mathcal{C}^2 \Rightarrow f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$

2.5 Développement à l'ordre 1 et 2

Formule de Taylor : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ et $(a;b) \in \mathcal{U}$, alors :

$$f(a+h;b+k) = f(a;b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a;b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\left(+ \mathrm{o}(\sqrt{h^2+k^2}) \text{ (ici ordre un)}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}k^2\frac{{}^2 f}{y^2}(a;b) + (h^2+k^2)\varepsilon(h;k)\text{(ordre deux)}$$

avec $\varepsilon(h;k) \xrightarrow[(h;k)\to(0;0)]{} 0$.
Notations de **Monge**: $p = f'_x(a;b)$, $q = f'_y(a;b)$, $r = f''_{xx}(a,b)$, $s = f''_{xy}(a;b)$ et $t = f''_{yy}(a;b)$.

2.6 Extrema locaux et globaux

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

1. **Définitions**
   (a) Point **critique** (stationnaire, singulier):
   $A(a,b)$ est point critique de f ssi $\begin{cases} f'_x(a,b) = 0; \\ et \\ f'_y(a,b) = 0 \end{cases}$.
   En pratique: La recherche des points critique **revient à** la recherche des solutions du système d'équations (aux inconnues $(x;y)$)
   $$A(a;b) \text{ point critioque de } f \iff (a;b) \text{ solution de } \begin{cases} f'_x(x;y) = 0; \\ et \\ f'_y(x;y) = 0 \end{cases}$$
   Une fonction f peut n'avoir aucun point critique, un nombre fini où une infinité de points critiques.
   (b) **Extréma locaux**, **Extréma globaux**:
   f atteint minimum **local** (resp maximum **local**) en (a,b) ssi il existe $\mathcal{V}$ voisinage(i.e. $\exists \mathcal{B}$ une boule ouverte centrée en (a,b) où $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$) telle que
   $$\forall (x,y) \in \mathcal{V} : \ f(x;y) \geq f(a;b)(\text{resp. } f(x;y) \leq f(a;b))$$
   On dit que f atteint un minimum (resp. maximum)global sur $\mathcal{D}$ ssi $\forall (x,y) \in \mathcal{D} : f(x,y) \geq f(a;b)$ (resp. $\forall (x,y) \in \mathcal{D} : f(x,y) \leq f(a;b)$).
   En général min. local$\neq$min. global.
2. Condition **nécessaire** :
   Théorème : Si f atteint un extremum local en (a,b) alors $(a;b)$ est un point critique ($p = q = 0$ en $(a;b)$).

3. Nature du point critique (condition **suffisante**): .... à partir de mardi 01/11/2013
   Notations de **Monge**: $p = f'_x(a;b)$, $q = f'_y(a;b)$, $r = f''_{xx}(a,b)$, $s = f''_{xy}(a;b)$ et $t = f''_{yy}(a;b)$.
   Théorème : Soit (a,b) un point critique(donc $p = q = 0$). On calcule $rt - s^2$ en $(a;b)$

   (a) **Si** $\boxed{\mathbf{(rt - s^2) > 0}}$ alors (a,b) est un extremum **local** :

      i. maximum local si $r < 0$.

      ii. minimum local si $r > 0$.

   (b) **Si** $\boxed{\mathbf{(rt - s^2) < 0}}$ alors $(a;b)$ n'est pas un extremum, on dit que c'est un point **col**, ou **selle**.

   (c) **Si** $\boxed{\mathbf{(rt - s^2) = 0}}$: on ne peut conclure i.e. un DL à l'ordre 2 ne suffit pas, il faut **procéder autrement**.

2.7 Démonstrations exigibles

1. Interprétation de $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(0)$ et $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(1)$
2. $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et $h \underset{a}{=} \mathrm{o}(g) \Rightarrow (f + h) \underset{a}{=} g$
3. $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ et h définie au voisinage de $a \Rightarrow (h.f) = \underset{a}{=} \mathrm{o}(h.g)$
4. Si $P = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i x^i \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $P \underset{0}{=} \mathrm{o}(x^k) \Rightarrow p_0 = p_1 = \cdots = p_k = 0$
5. Utilisation de la formule de la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique pour démontrer que
$$\frac{1}{1-x} \underset{x \approx 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$$
6. $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ .... (à partir de mardi 1/10).
7. Sketch de la démonstration:
   f (de classe $\mathcal{C}^1$) admet un extremum local en $A(a;b) \Rightarrow f'_x(a,b) = f'_y(a;b) = 0$ (i.e. A est un point critique de f)

© AZZAM HASSAN