Introduction sur les différents types de transfert :

- Sans transport macroscopique de matière : c'est la conduction (ou diffusion) thermique.
- Avec transport macroscopique de matière : c'est la convection, naturelle ou forcée.
- Par rayonnement : un corps chaud émet une onde électromagnétique qui transporte de l'énergie susceptible d'échauffer le corps qui la reçoit. Le lien entre la température du corps et la longueur d'onde d'émission est donné par la loi de WIEN : $\lambda_{max}T = 2898$ m.K.

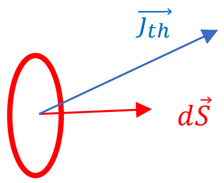
I. LOI DE FOURIER

A. Flux thermique – Densité de courant thermique

- Soit δQ l'énergie thermique transférée à travers une surface élémentaire orientée $\overrightarrow{dS}$, pendant dt
On définit la puissance élémentaire ou flux thermique élémentaire associé, $d\Phi_{th}$, par :
$$\delta Q = d\Phi_{th} dt$$

- Afin de caractériser aussi la direction du transfert, on introduit, par analogie avec la mécanique des fluides et l'électromagnétisme, un vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{th}}$:

$$d\Phi_{th} = \overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{dS}$$



- soit : $\Phi_{th} = \iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{j_{th}}(M).\overrightarrow{dS_M}$ pour une surface macroscopique Σ

- Φ_{th} est donc la puissance thermique qui traverse la surface Σ ; c'est le flux du vecteur densité de puissance thermique ou densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{th}}$.

B. Loi phénoménologique de la conduction thermique

$$j_{th}(x,t) = -K\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t$$
$$\overrightarrow{j_{th}} = -K\overrightarrow{grad}(T) ;$$

K (noté souvent aussi λ) est la conductibilité ou conductivité thermique du milieu étudié.

Argent	429
Cuivre	401
Or	310
Aluminium	250
Nickel	91
Fer	72
Porcelaine	6
Marbre	3
Béton plein	1.75
Verre	1
Placoplatre	0.46
Bois de pin	0.14
Laine de verre	0.041
Air sec immobile	0.024

Quelques valeurs de K à 25 °C (W.m^{-1}.K^{-1})

C. Limites et analogie avec la loi d'Ohm et la loi de Fick

Loi de Fourier	Loi de Fick	Loi d'Ohm
vecteur densité de courant thermique $\vec{j}$	vecteur densité de particules $\vec{j}$	vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$
température T	densité particulaire n	potentiel V
conductivité thermique K	coefficient de diffusion D	conductivité électrique γ
$\vec{j} = -K\ \overrightarrow{grad}\ T$	$\vec{j} = -D\ \overrightarrow{grad}\ n$	$\vec{j} = -\gamma\ \overrightarrow{grad}\ V$

- Si le gradient de température est trop important, la loi n'est plus linéaire.
- Si le gradient de température varie trop rapidement dans le temps, le milieu réagit avec un retard (associé à un temps caractéristique τ).
- Si le milieu est anisotrope, il présente des valeurs différentes de λ suivant la direction de conduction : $\lambda_{Cgr_{//}}$ = 1950 W.m^{-1}.K^{-1} et $\lambda_{Cgr_{\perp}}$ = 6 W.m^{-1}.K^{-1}.

II. EQUATION DE LA CHALEUR

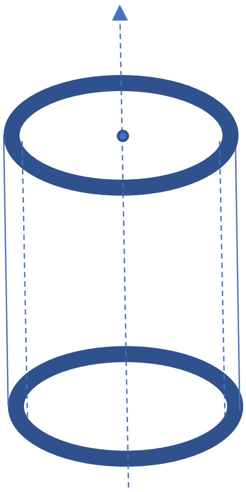
A. Bilan énergétique à une dimension

Dans les deux cas suivants, le système (volume hachuré ci-dessous par exemple) n'échange d'énergie qu'à cause du gradient de température.

- En géométrie cartésienne :
  On considère une tige de longueur L, de section S. En x = 0, elle est en contact avec un thermostat de température T_1, et en x = L, elle est en contact avec une thermostat de température T_2.
  Elle est en outre latéralement calorifugée ; le gradient de température installe un flux thermique.
  On peut supposer que T(x, t) dans la barre et donc que $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(x,t)\overrightarrow{e_x}$.
  Etudions un volume dτ = Sdx de matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

- En géométrie cylindrique à symétrie de révolution :



On considère un manchon cylindrique de révolution ; le cylindre intérieur, de rayon a, est uniformément porté à T_1 et le cylindre extérieur, de rayon b, est uniformément porté à T_2.
On suppose la hauteur du cylindre h >> b et a.

Les caractéristiques du milieu sont les mêmes que dans la géométrie précédente.

De la symétrie de révolution, de l'absence d'effets de bord et de l'uniformité de T_1 et T_2, on déduit T(r,t) et $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(r,t)\overrightarrow{e_r}$.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})$$

B. Généralisation

Pour un système sans autre apport que le flux thermique dû au gradient de température, l'équation de la chaleur s'écrit en 3D :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{D}\Delta \mathrm{T}$$

C. Cas d'un échange énergétique avec l'extérieur

Quels sont les cas usuels (exercices…) où l'on est amené à prendre en compte des échanges énergétiques autres que ceux du flux de diffusion ?

- Effet Joule

Le matériau peut être parcouru par un courant électrique I, associé à une densité de courant $\vec{j}$; il faut alors prendre en compte la puissance correspondante.

Pour un milieu de conductivité électrique γ et pour un volume $d\tau$, comment s'écrit le transfert thermique associé ?

Reprenons alors le bilan du A. en géométrie cartésienne pour trouver la nouvelle équation de diffusion :

- Loi de Newton

Le matériau peut échanger de l'énergie thermique avec le milieu extérieur dans lequel il est plongé (air, autre gaz, liquides…).
Le transfert est alors qualifié de conducto-convectif.
La loi empirique la plus simple qui est utilisée pour modéliser ce transfert (dite loi de Newton) s'écrit :

$$\delta Q = - h(T(M, t) - T_{ext})dS_{ext}dt$$

h est le coefficient d'échange conducto-convectif, T(M, t) est la température du milieu en M à t, dS_{ext} est la surface élémentaire de contact entre le volume $d\tau$ du milieu et l'extérieur.
Remarquons que si $T(M, t) - T_{ext} > 0$, le milieu cède effectivement de l'énergie à l'extérieur et on a bien $\delta Q < 0$.

De même que pour l'effet Joule, nous allons illustrer ceci avec l'exemple de la barre cylindrique en coordonnées cartésiennes :

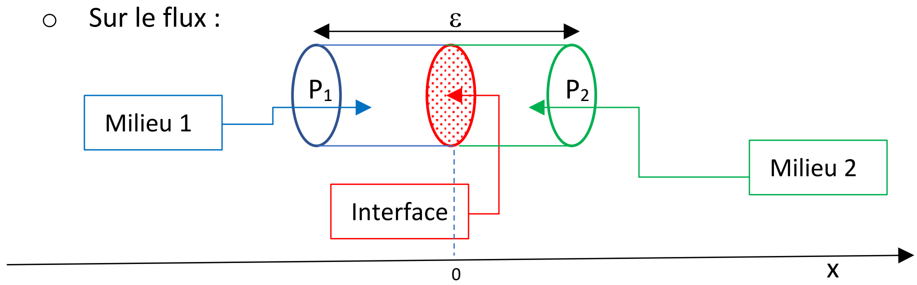
III. SOLUTIONS DE L'EQUATION DE DIFFUSION

A. Conditions aux limites temporelles et spatiales

Intégrer l'équation de diffusion suppose de connaître :

- Les conditions initiales sur la température, c'est-à-dire, en tout point du milieu étudié, la fonction T(M, 0).
  R : si on s'intéresse à un régime permanent établi, cette donnée n'est plus pertinente (cf. B.).

- Les conditions aux limites spatiales :
  - Sur le flux :



Un bilan d'énergie sur le volume ci-dessus en dt donne :

$\Phi_{th1}(P_1,t)dt - \Phi_{th2}(P_2,t)dt = e_{vol}\varepsilon S$, où e_{vol} est la densité d'énergie dans le volume εS
Si nous faisons tendre ε vers 0, P_1 et P_2 se confondent et le membre de droite tend vers 0.
On a alors : $\Phi_{th1}(0,t) = \Phi_{th2}(0,t)$: **le flux est donc continu à l'interface** ; il suffit alors de l'exprimer en 0^- avec l'expression correspondant au milieu 1 et en 0^+ avec celle du milieu 2.

R : Nous avons vu une relation analogue en mécanique des fluides au sujet de la continuité du flux de quantité de mouvement (notamment dans un exercice où la viscosité de l'air était prise nulle et où cette continuité avait donné la relation $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{(z=h)} = 0$

Différents cas se présenteront dans les exercices :

- Si le milieu étudié est isolé à l'abscisse x =0 :
  $\Phi_{th}(0,t) = 0$, ou encore $j_{th}(0,t) = 0$, soit $-K\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = 0$.

- Interface solide - solide
  $j_{th1}(0^-,t) = j_{th2}(0^-,t)$ ou encore avec la loi de Fourier
  $$-K_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_0 = -K_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_0.$$

- Interface solide - fluide
  On utilise alors la loi de Fourier pour le solide et la loi de Newton :
  $$-K\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = -h(T(0,t) - T_{ext})$$

  - Sur la température

Dans certains cas, on peut considérer que la température est continue à l'interface entre deux milieux ; on parle alors de **contact parfait** et $T_1(0, t) = T_2(0, t)$, avec les mêmes notations que ci-dessus.

B. Cas du régime stationnaire

Dans le cas du régime stationnaire, l'équation de de diffusion s'écrit : $\Delta T = 0$.

Reprenons tout d'abord la géométrie cartésienne.

- *Solution*
  Pour la tige du II.A., l'intégration est immédiate : $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$

- *Conservation du flux*
  On voit que, quelque soit x, le flux thermique est identique pour toute section S de la tige : $\Phi_{th}(x)$ = -KS$\frac{T_2-T_1}{L}$.
  Ce résultat est caractéristique du régime stationnaire
  R importante : il ne faut pas le confondre avec la continuité à une interface qui est locale alors qu'ici la relation est valable pour tout x (ou tout r, cf. plus loin)

- *Résistance thermique*
  - Définition : par analogie avec les résistances électrique ou hydraulique, on définit,
  $$R_{th} = \frac{1}{G_{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$
  - Géométrie cartésienne :
  $$R_{th} = \frac{L}{KS}$$
  - Associations de résistances thermiques : les résistances se somment pour les associations en série et leurs inverses se somment pour les associations en // (voir exercice sur le double vitrage).

A titre d'exercice d'application, reprenons maintenant le cas cylindrique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \text{ et } \frac{\partial T}{\partial t} = 0\text{, d'où } \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0.$$

$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$, soit $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{cte}{r}$ et $T(r) = cte \ln\frac{r}{r_0}$ où r_0 est une constante.

En supposant le contact parfait : $\begin{cases} T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases}$

on obtient $cte = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$

et $T(r) = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln\frac{r}{r_0}$

Calculons $\frac{\partial T}{\partial r}$: $\frac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \cdot \frac{1}{r}$, puis

$\phi_{th}(r) = -K \dfrac{T_1 - T_3}{\ln(R_1/R_2)} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi r h$

$\phi_{th}(r) = -2\pi K h \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}$ et $R_{th} = \dfrac{\ln(R_1/R_2)}{2\pi K h}.$

On retrouve dans le cas cylindrique la conservation du flux à travers toute surface S(r) qui permet d'exprimer la résistance thermique correspondante.

- *Temps caractéristique :* Comme pour la diffusion de quantité de mouvement, on peut mettre en évidence un temps caractéristique d'accès au régime stationnaire en utilisant l'équation de diffusion « en ordre de grandeur » : $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ devient $\frac{T}{\tau} = D\frac{T}{L^2}$ et donc $\tau = \frac{L^2}{D} = \frac{\rho c L^2}{K}$

$\tau = \frac{8960*385*L^2}{400}$ pour le cuivre ; soit 2,4 heures pour L = 1m et 1,5 minutes pour L = 10 cm.

C. ARQS thermique – Circuit RC thermique

D. Propagation d'une onde thermique – Effet de peau thermique