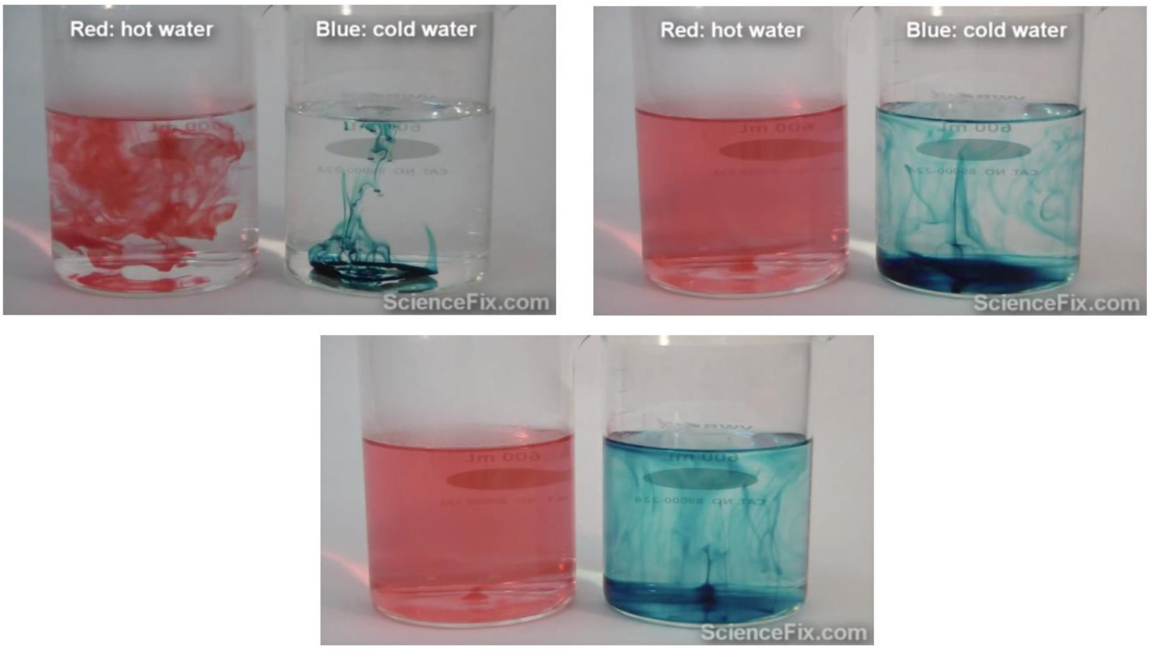
DIFFUSION DE PARTICULES



Diffusion de gouttes de colorant rouge ou bleu dans de l'eau chaude ou froide au bout de 1 ; 9 et 18 s

La **diffusion** est un phénomène de transport de particules sans mouvement d'ensemble :

- il implique une inhomogénéité de concentration du milieu,
- il correspond à un déplacement de particules des concentrations les plus élevées vers les concentrations les plus faibles,
- il est lié à l'agitation thermique (chocs successifs) et donc à la température, comme l'illustre la diffusion du colorant rouge par rapport au colorant bleu.

Il ne faut pas confondre la diffusion avec le transport de matière par **convection** qui correspond à un déplacement macroscopique d'ensemble des particules.
La diffusion de particules est donc un phénomène du même type que la diffusion thermique : on notera de fortes analogies entre les deux (ainsi qu'avec la diffusion de champ magnétique et celle de quantité de mouvement).

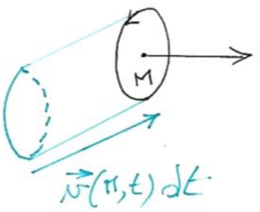
I. LOI DE FICK

Nous définissons :

- Le flux particulaire Φ_{part} comme la quantité de particules traversant une surface orientée Σ par unité de temps,

$$\Phi_{part} = \frac{dN_\Sigma}{dt} \text{ ; il s'exprime en } s^{-1}$$

- La densité de courant de particules : $\vec{j}_{Part}(M, t) = n^*(M, t)\vec{v}(M,t)$, où $n^*(M, t)$ représente la densité particulaire et $\vec{v}(M,t)$ le champ de vitesse en M à l'instant t. j_{Part} s'exprime en $m^{-2}.s^{-1}$.
  En « comptant » les particules de vitesse $\vec{v}(M,t)$ qui traversent le surface $\vec{dS}$ pendant dt, montrer que l'on peut écrire : $d\Phi_{part,ds} = \vec{j}_{Part}(M, t).\,\vec{dS}_M$.



$n^*(M,t).\vec{v}(M,t)dt.\vec{dS}$ particules traversent $\vec{dS}$ en dt. Donc $[n^*(M,t)\ \vec{v}(M,t)].\vec{dS}$ traversent $\vec{dS}$ par unité de temps.

Soit $\vec{j}_{part}(M,t) = n^*(M,t)\vec{v}(M,t)$, $d\phi_{part} = \vec{j}_{part}.\vec{dS}$

On notera l'analogie de raisonnement avec l'introduction du vecteur $\vec{j}$ en électromagnétisme ou du vecteur densité de courant de masse en mécanique des fluides.

On cherche alors à relier l'inhomogénéité de concentration et le courant de particules qui en résulte. La relation la plus simple que l'on puisse tirer de l'observation expérimentale est la loi de FICK. Comme la loi de FOURIER, c'est une loi phénoménologique, linéaire, qui rend compte de l'expérience dans un certain domaine de validité :

$$\vec{j}_{Part}(\mathrm{M,t}) = -\mathrm{D}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{n}^*(\mathrm{M,t}))$$

D est la diffusivité ; elle s'exprime en $m^2.s^{-1}$; quelques valeurs typiques à 25 °C :

Phase	Gaz	Gaz	Gaz	Liquide	Liquide	Solide
Support	Air	Air	H_2	H_2O	H_2O	Cu
Particules diffusantes	H_2	O_2	D_2	H_2	O_2	Al
D en $\mathrm{m^2.s^{-1}}$	$7,12.10^{-5}$	$2,06.10^{-5}$	$1,24.10^{-4}$	$5,13.10^{-9}$	$1,80.10^{-9}$	$1,30.10^{-30}$

Quel est le sens physique du signe – dans la loi de Fick ?

Il indique la tendance à l'homogénéisation : les particules se déplacent des zones de plus fortes concentration vers les zones de plus faibles concentrations ; il est ainsi une traduction de l'irréversibilité du (des) phénomène(s) de diffusion.

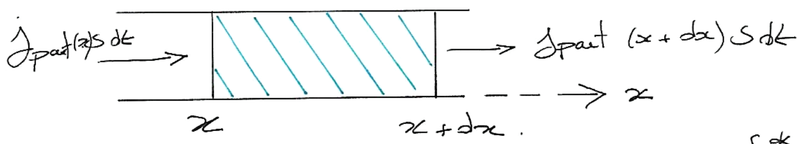
Donner par analogie avec les lois de Fourier et d'Ohm les limites de validité de la loi de FICK

- **Non linéarité si le gradient de concentration est trop important**
- **Retard temporel de la réponse du milieu si le gradient de concentration varie « trop rapidement »**
- **Anisotropie**

II. EQUATION DE LA DIFFUSION

A. Bilan de matière

En faisant un bilan de matière sur une tranche de longueur dx comprise entre x et x + dx pendant un intervalle de temps dt, montrer que : $\frac{\partial n*}{\partial t} = -\frac{\partial j_{part}}{\partial x}$



$$j_{part}(x,t)\,S\,dt - j_{part}(x+dx)\,S\,dt = [n^*(x,t+dt) - n^*(x,t)]\,S\,dx$$

soit $$-\left(\frac{\partial j_{part}(x,t)}{\partial x}\right) S\,dt\,dx = \left(\frac{\partial n^*(x,t)}{\partial t}\right) S\,dt\,dx.$$

et $$\frac{\partial n^*(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{part}(x,t)}{\partial x} = 0.$$

Soit en généralisant : $$\boldsymbol{div(\vec{J}_{Part}(M,t)) + \frac{\partial n^*(M,t)}{\partial t} = 0}$$

Ce résultat est à rapprocher du bilan d'énergie du chapitre précédent ; en trois dimensions les relations de conservation vues depuis le début de l'année s'écrivent, avec les notations usuelles :

Conservation de la charge ou de la masse : $\boldsymbol{div(\vec{j}(M,t)) + \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0}$

Conservation de l'énergie : $\boldsymbol{div(\vec{J}_{th}(M,t)) + \frac{\partial h(M,t)}{\partial t} = 0}$

B. Equation de diffusion

En utilisant la loi de FICK, le bilan devient :

$$\frac{\partial n*(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n*(x,t)}{\partial x^2}$$

L'irréversibilité du phénomène qui apparait sur les photos du début du polycopié et qui correspond à la tendance à l'homogénéisation est confirmée par la présence de la dérivée première temporelle : il n'y pas de t-symétrie des équations de diffusion (changer t en -t ne conserve pas l'équation ; dans une équation de D'Alembert au contraire, la t-symétrie existe et on peut inverser le sens du temps…).

On notera l'analogie entre les équations :

$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D_{part}\Delta \boldsymbol{n}^*$; $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th}\Delta T$; $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = D_{visc}\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{v}}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D_{mag}\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{B}}$,

$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$; $D_{visc} = \frac{\eta}{\rho}$; $D_{mag} = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$.

A partir de ce résultat, montrer que le temps caractéristique associé à la diffusion de particules dans un support s'écrit : $\tau_{diff} = \frac{L^2}{D}$.

Comme pour les autres équations de diffusion : $\frac{n^*}{\tau} = D_{part}\frac{n^*}{L^2}$

Faire une application numérique dans une situation de votre choix pour τ_{diff}

- $O_{2(g)}$ dans l'air : 14h pour 1 m ; 8 min pour 10 cm
- $O_{2(g)}$ dans l'eau : 17 ans pour 1 m ; 2 mois pour 10 cm

C. Solutions

Les conditions initiales et aux limites sont du même type que pour la diffusion thermique ; elles seront en général précisées dans les textes de problèmes et d'exercices :

- Introduction de particules avec un débit donné en un point de l'espace.
- Valeur initiale de la densité particulaire en tout point du domaine étudié.
- Taux de création de particules (radioactivité par exemple).
- Continuité du flux de particules aux interfaces.

Les méthodes de résolution sont les mêmes que pour la diffusion thermique.

Pour compléter ce document : http://www.lycee-champollion.fr/IMG/pdf/asds_fick.pdf