

PESE LETTRE (statique)

PREMIERE PARTIE

$$\theta = 0$$

Q1) Pour les deux liaisons pivot (en A et D) il ne peut pas y avoir de moment puisque :

- le problème est supposé plan donc pas de composante L_{ij} sur \vec{x}_1 , ni M_{ij} sur \vec{y}_1 .
- ces deux pivots étant parfaites (donc sans frottement) il n'y a pas non plus de composante du moment N_{ij} sur \vec{z}_1 .

Pour les deux liaisons sphérique (en B et C) il ne peut pas y avoir de composante statique pour le moment puisque les trois rotations sont possibles. Ces deux liaisons ne peuvent donc pas transmettre de moment (liaisons parfaites c'est-à-dire sans frottement).

Conclusion : les actions mécaniques au niveau de ces quatre liaisons sont donc de simples glisseurs.

Q2) Les glisseurs de chacune des quatre liaisons passent par le centre de la liaison concernée parce que ces liaisons sont parfaites (plus précisément : sans frottement).

Si ces liaisons n'avaient pas été supposées parfaites on aurait toujours eu des glisseurs mais leur ligne d'action ne serait plus passée par le centre de la liaison concernée.

Q3) L'une des pièces du mécanisme n'est soumise qu'à deux glisseurs (son poids étant négligé) : il s'agit de la bielle 4 avec deux liaisons sphériques aux extrémités (une en B et l'autre en C).

Le fait que cette pièce est en équilibre entraîne alors que ces deux glisseurs doivent être égaux en norme et directement opposés, c'est-à-dire portés par la droite (BC) .

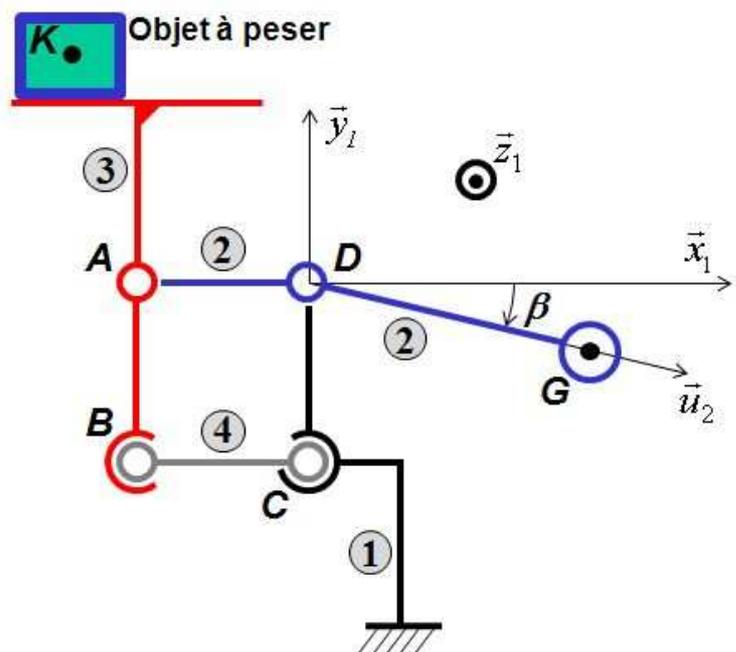
Cela permettra ainsi de connaître, lors de l'isolement du plateau 3 , la direction du glisseur appliqué en B de 4 sur 3 .

Q4) Si $\theta = 0$ alors le système est dans la configuration ci-contre :

On a : $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et les segments $[AD]$ et $[BC]$ sont horizontaux.

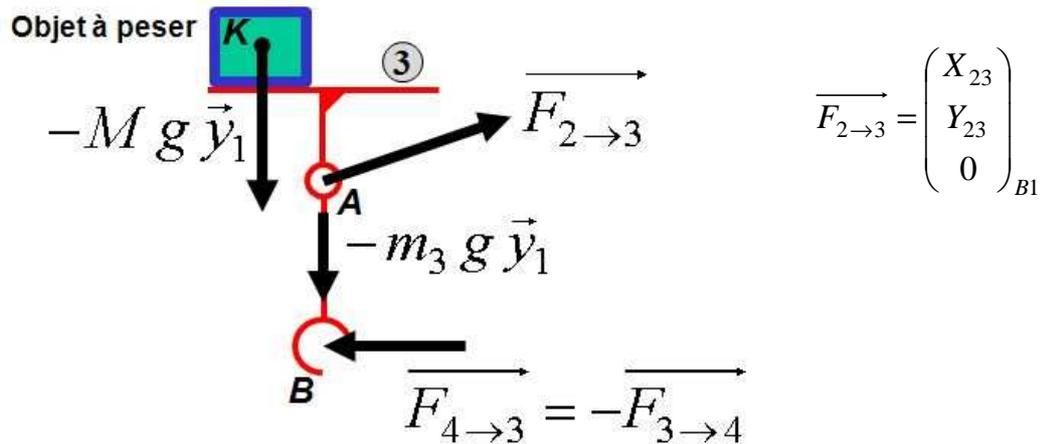
Isolons d'abord la bielle 4 :

- Isoler : la bielle 4 .
- BAME : poids négligé, action du châssis 1 (sphérique en C), action du plateau 3 (sphérique en B).
- PFS : on a un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs (un appliqué en C et l'autre appliqué en B), ces deux glisseurs sont donc égaux en norme et directement opposés.



La ligne d'action du glisseur de 3 sur 4 (et du glisseur de 1 sur 4) est la droite (BC) , c'est-à-dire que ces deux efforts sont horizontaux et n'ont donc pas de composante sur la verticale \vec{y}_1 .

Q5) Equilibre du plateau 3 et de l'objet posé :



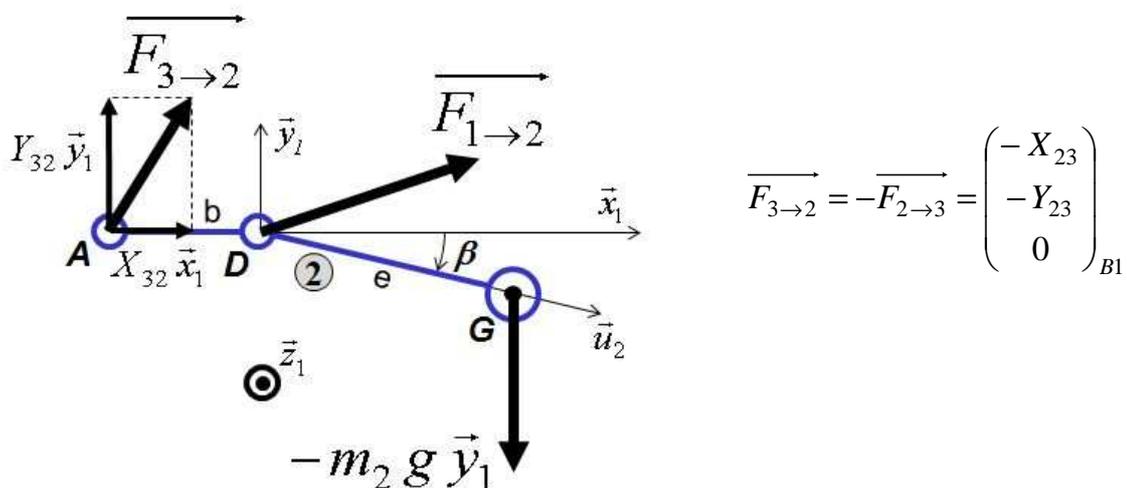
- **Isoler :** le plateau 3 associé à l'objet posé dessus.
- **BAME :**
 - poids du plateau 3 : glisseur $-m_3 g \vec{y}_1$ porté par la droite (AB).
 - poids de l'objet posé : $-M g \vec{y}_1$ appliqué au point **K** avec $\vec{AK} = -c \vec{x}_1 + d \vec{y}_1$.
 - action du balancier 2 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application **A** (car liaison pivot parfaite).
 - action de la biellette 4 (sphérique centrée en B) : glisseur appliqué en **B** de support la droite (BC) d'après la question précédente.
- **PFS :** résultantes (TRS) en projection sur la verticale \vec{y}_1 .

$$-M g - m_3 g + Y_{23} + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{23} = (M + m_3) g$$

Pas de composante verticale de l'action de 4 sur 3 d'après la question précédente

Nota : la composante horizontale X_{23} compense l'action en **B** de 4 sur 3 qui est horizontale d'après la question précédente (TRS en projection sur \vec{x}_1).

Q6) Equilibre du balancier 2 :



- **Isoler** : le balancier 2.
- **BAME** :
 - poids du balancier 2 : $-m_2 g \vec{y}_1$ appliqué au point **G**.
 - action du châssis 1 (pivot en D) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application **D** (car liaison pivot parfaite).
 - action du plateau 3 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application **A** (car liaison pivot parfaite).
- **PFS** : moments (**TMS**) au point **D** en projection sur \vec{z}_1 .

$$-b \times Y_{32} - (e \cos \beta) \times m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad -b \times (-Y_{23}) - e \cos \beta \times m_2 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad b \times Y_{23} - e \cos \beta \times m_2 g = 0$$

Nota : le moment en **D** de la composante X_{32} de l'action de 3 sur 2 est nul car elle passe par le point **D**.

Q7) On obtient finalement les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} Y_{23} = (M + m_3)g \\ b \times Y_{23} - e \cos \beta \times m_2 g = 0 \end{cases}$$

On en déduit la relation suivante : $b \times (M + m_3) - e \cos \beta \times m_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{e}{b} \times \cos \beta \times m_2 - m_3$$

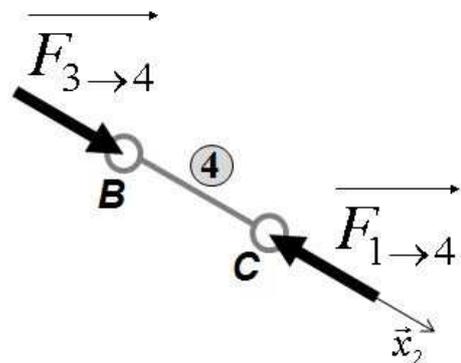
A.N. : $M = \frac{7}{4,5} \times \cos 15^\circ \times 50 - 20 \quad \Rightarrow \quad M = 55 \text{ g}$

DEUXIEME PARTIE

$$\Rightarrow \quad \theta \neq 0$$

Q8) Equilibre de la bielle 4 :

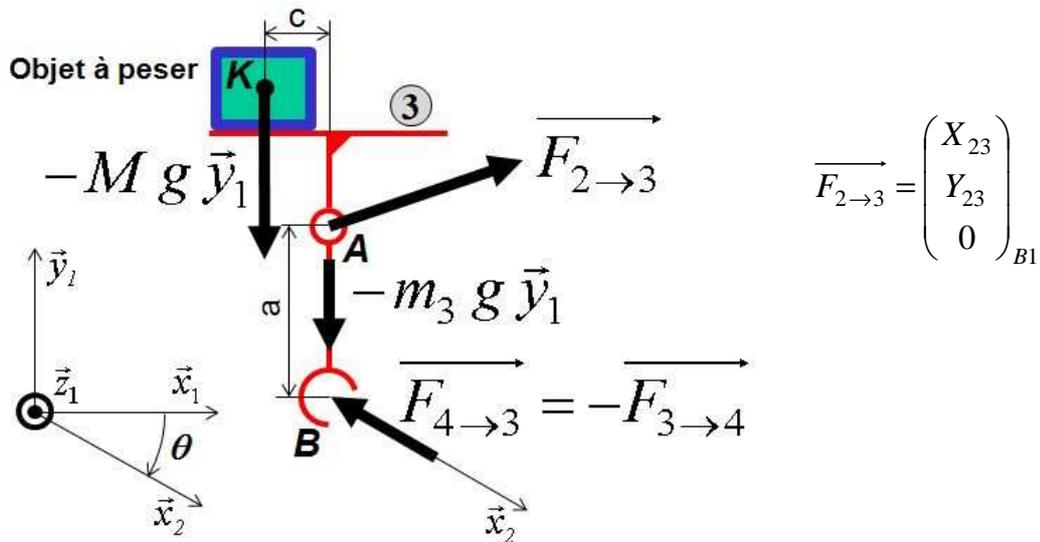
- **Isoler** : la bielle 4.
- **BAME** : poids négligé, action du châssis 1 (sphérique en **C**), action du plateau 3 (sphérique en **B**).
- **PFS** : on a un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs (un appliqué en **C** et l'autre appliqué en **B**), ces deux glisseurs sont donc égaux en norme et directement opposés.



\Rightarrow La ligne d'action du glisseur de 3 sur 4 et du glisseur de 1 sur 4 est la droite (**BC**).

Nota : les deux liaisons sphériques étant parfaites les actions mécaniques (glisseurs) passent par leur centre respectif.

Q9) Equilibre du plateau 3 et de l'objet posé :



- **Isoler** : le plateau 3 associé à l'objet posé dessus.
- **BAME** :
 - poids du plateau 3 : glisseur $-m_3 g \vec{y}_1$ porté par la droite (AB) .
 - poids de l'objet posé : $-M g \vec{y}_1$ appliqué au point K avec $\overline{AK} = -c \vec{x}_1 + d \vec{y}_1$.
 - action du balancier 2 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application A (car liaison pivot parfaite).
 - action de la biellette 4 (sphérique centrée en B) : glisseur appliqué en B de support la droite (BC) d'après la question précédente.
- **PFS** : résultantes (TRS) en projection dans la base B_1 et équation des moments (TMS) au point A en projection sur \vec{z}_1 .

Bien noter que l'angle θ est négatif.

- TRS en projection sur \vec{x}_1 : $X_{23} - \|F_{4 \rightarrow 3}\| \times \cos(-\theta) = 0 \Rightarrow X_{23} = \|F_{4 \rightarrow 3}\| \times \cos \theta$

- TRS en projection sur \vec{y}_1 : $-M g - m_3 g + Y_{23} + \|F_{4 \rightarrow 3}\| \times \sin(-\theta) = 0$

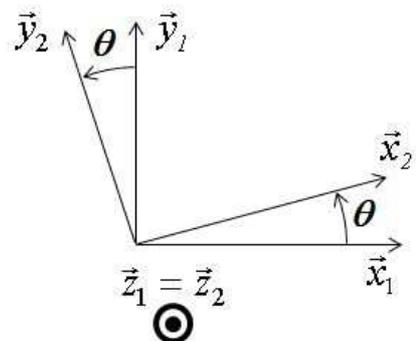
$\Rightarrow Y_{23} = \|F_{4 \rightarrow 3}\| \times \sin \theta + (M + m_3) g$

- TMS en A sur \vec{z}_1 : l'angle θ est négatif, nous allons maintenant raisonner vectoriellement sur la figure ci-contre pour effectuer le calcul du moment de l'action en A de 4 sur 3 :

$$\overline{M(A; F_{4 \rightarrow 3})} = \overline{M(B; F_{4 \rightarrow 3})} + \overline{AB} \wedge F_{4 \rightarrow 3}$$

$$= -a \vec{y}_1 \wedge \|F_{4 \rightarrow 3}\| (-\vec{x}_2) = +a \|F_{4 \rightarrow 3}\| \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2$$

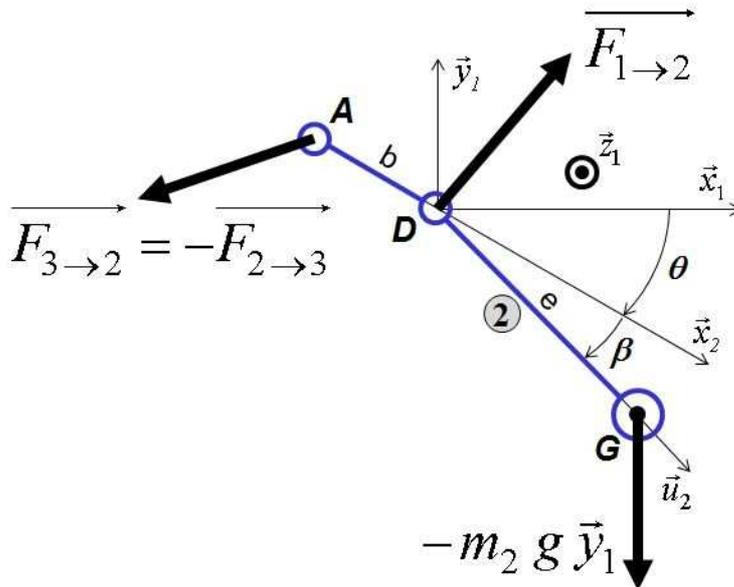
$$= a \|F_{4 \rightarrow 3}\| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) (-\vec{z}_1) \Rightarrow \overline{M(A; F_{4 \rightarrow 3})} = -a \|F_{4 \rightarrow 3}\| \cos \theta \vec{z}_1$$



D'où le **TMS** en A sur \vec{z}_1 : $+M g \times c - a \left\| \vec{F}_{4 \rightarrow 3} \right\| \cos \theta = 0$

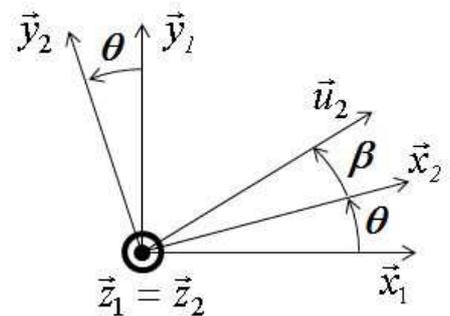
$$\Rightarrow \left\| \vec{F}_{4 \rightarrow 3} \right\| = + \frac{M g \times c}{a \cos \theta}$$

Q10) Equilibre du balancier 2 :



$$\vec{F}_{3 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 3} = \begin{pmatrix} -X_{23} \\ -Y_{23} \\ 0 \end{pmatrix}_{B1}$$

- **Isoler** : le balancier 2.
- **BAME** :
 - poids du balancier 2 : $-m_2 g \vec{y}_1$ appliqué au point **G**.
 - action du châssis 1 (pivot en D) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application **D** (car liaison pivot parfaite).
 - action du plateau 3 (pivot en A) : glisseur inconnu (norme et direction) et de point d'application **A** (car liaison pivot parfaite).
- **PFS** : moments (**TMS**) au point **D** en projection sur \vec{z}_1 . Les angles θ et β étant négatifs, nous allons raisonner vectériellement sur la figure ci-contre :



- Moment en D de l'action appliquée en A :

$$\overrightarrow{M(D ; F_{3 \rightarrow 2})} = \overrightarrow{M(A ; F_{3 \rightarrow 2})} + \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}}$$

$$= -b \vec{x}_2 \wedge \begin{pmatrix} +X_{32} \\ +Y_{32} \\ 0 \end{pmatrix}_{B1} = -b \begin{pmatrix} +\cos \theta \\ +\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{B1} \wedge \begin{pmatrix} +X_{32} \\ +Y_{32} \\ 0 \end{pmatrix}_{B1}$$

$$= -b \times (+\cos \theta Y_{32} - \sin \theta X_{32}) \vec{z}_1 = b \times (-\cos \theta Y_{32} + \sin \theta X_{32}) \vec{z}_1$$

- Moment en D du poids appliqué en G :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}(D; \overrightarrow{P}_{pes \rightarrow 2}) &= \overrightarrow{M}(G; \overrightarrow{P}_{pes \rightarrow 2}) + \overrightarrow{DG} \wedge \overrightarrow{P}_{pes \rightarrow 2} \\ &= \overrightarrow{0} \\ &= +e\vec{u}_2 \wedge -m_2 g \vec{y}_1 = -em_2 g (\vec{u}_2 \wedge \vec{y}_1) = -em_2 g \left\{ +\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \beta)\right) \vec{z}_1 \right\} \\ &= -em_2 g \cos(\theta + \beta) \vec{z}_1 \end{aligned}$$

D'où le TMS en D sur \vec{z}_1 : $b \times (-\cos\theta Y_{32} + \sin\theta X_{32}) - em_2 g \cos(\theta + \beta) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{b \times (\sin\theta X_{32} - \cos\theta Y_{32}) = em_2 g \cos(\theta + \beta)}$$

Q11) On obtient finalement les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} X_{23} = -X_{32} = \|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \cos\theta \\ Y_{23} = -Y_{32} = \|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \sin\theta + (M + m_3)g \\ \|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\| = +\frac{M g \times c}{a \cos\theta} \\ b \times (\sin\theta X_{32} - \cos\theta Y_{32}) = em_2 g \cos(\theta + \beta) \end{cases}$$

En reportant dans la dernière équation les résultats des deux premières on obtient :

$$b \times \left\{ \sin\theta \times \left(-\|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \cos\theta\right) - \cos\theta \times \left(-\|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\| \times \sin\theta - (M + m_3)g\right) \right\} = em_2 g \cos(\theta + \beta)$$

$$\Rightarrow b \times \left\{ -\cancel{\sin\theta \times \cos\theta \times \|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\|} + \cancel{\cos\theta \times \sin\theta \times \|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\|} + \cos\theta \times (M + m_3)g \right\} = em_2 g \cos(\theta + \beta)$$

$$\Rightarrow +b \cos\theta \times (M + m_3)g = +em_2 g \cos(\theta + \beta)$$

$$\Rightarrow (M + m_3) = \frac{em_2 \cos(\theta + \beta)}{b \cos\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos\theta} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3}$$

Nota : finalement le calcul de l'expression de $\|\overrightarrow{F}_{4 \rightarrow 3}\|$ était inutile...

La position de l'objet sur le plateau 3 n'a aucune influence sur la valeur de l'angle θ puisque la distance c qui le positionne n'apparaît pas dans le résultat final.

$$Q12) \text{ Si } \theta = 0 \text{ on obtient : } M = \frac{\cos(0 + \beta)}{\cos 0} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3 \quad \Rightarrow \quad M = \cos \beta \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3$$

On retrouve bien le résultat mis en place dans la première partie.

$$Q13) M = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos \theta} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3 \quad \Rightarrow \quad m_2 = (M + m_3) \times \frac{\cos \theta}{\cos(\theta + \beta)} \times \frac{b}{e}$$

$$\underline{\text{A.N. :}} \quad m_2 = (0 + 20) \times \frac{\cos(-70^\circ)}{\cos(-70^\circ - 15^\circ)} \times \frac{4,5}{7} \quad \Rightarrow \quad m_2 = 50 \text{ g}$$

On retrouve la valeur donnée en première partie.

Q14) Le segment **[DG]** est horizontal lorsque $(\theta + \beta) = 0$ c'est-à-dire $\theta = +15^\circ$.

$$M = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos \theta} \times \frac{e}{b} \times m_2 - m_3 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\cos(+15^\circ - 15^\circ)}{\cos(+15^\circ)} \times \frac{7}{4,5} \times 50 - 20 \quad \Rightarrow \quad M = 60 \text{ g}$$

Q15) Il suffit de **pouvoir déplacer le contre poids placé au point G** ce qui modifie ainsi la distance e .