Semaine du 25 septembre 2017

Révision : Tout le chapitre sur les séries.

Familles sommables de nombres complexes

1. Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. (Démonstrations non exigibles.)

Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables(*).
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. (la démonstration a été faite par procédé diagonal mais n'est pas exigible.)

2. Familles sommables

I est au plus dénombrable. La famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite sommable si l'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in F} u_i$ où F décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.

Théorème de sommation par paquets :(Démonstration hors programme).

si I est la réunion d' ensembles deux à deux disjoints I_n et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :
— Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.
— La série $\displaystyle\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable Par définition, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Somme d'une telle famille.

La famille $(u_n)_n \in \mathbb{N}$est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets. Soit I est la réunion d' ensembles deux à deux disjoints I_n et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes sommable. Alors

— Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

— La série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge absolument.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

(Démonstration hors programme).

3. Applications des familles sommables

La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et la série $\sum\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge. Si tel est le cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. (*) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut être divergent : exemple.(*)
L'exponentielle complexe étant définie comme $\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$
dém. de $\exp(z+z') = \exp(z) * \exp(z)$(*)