Semaine du 18 septembre 2017

Fonctions convexes

1. Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Barycentre (notion introduite exclusivement en vue de l'étude de la convexité).
Définition d'une partie convexe.
Prop : Une partie A d'un espace vectoriel réel est convexe si et seulement si $\forall(x_1,\dots,x_n)\in A^n, \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{+n}$de somme 1, $\sum \lambda_i x_i \in A$ (*)

2. Fonctions convexes d'une variable réelle

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x,y) de I^2 et tout λ de $[0,1]$:

$$f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

Caractérisations : convexité de l'épigraphe(*), croissance des pentes des sécantes dont une extrémité est fixée.(*)
Inégalité de Jensen

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

où $x_1,\dots,x_n$ sont des points de I et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs de somme 1.(*)

Fonction concave.
Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I(*).
Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.(*)
Exemples d'inégalités de convexité.

Séries numériques : Révisions de Première année et compléments

1. Généralités

Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente. La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.(*) Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.
Lien suite-série. La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.(*)

2. Séries à termes positifs

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

2.1. Si $u_n = O(v_n)$, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.(*)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

2.2. Règle de D'Alembert (*).

2.3. Comparaison série-intégrale dans le cas monotone. Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ converge.(*) Csq :La série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $(\displaystyle\int_0^n f(t)dt)$ converge.
Séries de Riemann. (*)

3. Séries absolument convergentes

Convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence. (*)

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

3.1. Sommation des relations de comparaison. :
Domination, négligeabilité, équivalence. (*) La suite de référence est positive.

4. Séries alternées

Critère spécial des séries alternées.(*) Signe et encadrement des restes.(*)
L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Exemples d'une série convergente sans l'être absolument, de séries de termes généraux équivalents et de nature différente.(*)
Exercices banque CCP : Analyse EX 1,4,5,6,7 .