

ONDULEUR MINES-PONTS 2013 CORRIGÉ

□ **22** — Une source de tension est dite parfaite si sa force électromotrice vaut E quelle que soit l'intensité i du courant qui la traverse. Une source de courant est dite parfaite si elle délivre l'intensité i_s quelle que soit la tension U_s à ses bornes. Remarque : les grandeurs E et i_s ne sont pas nécessairement constantes dans le temps.

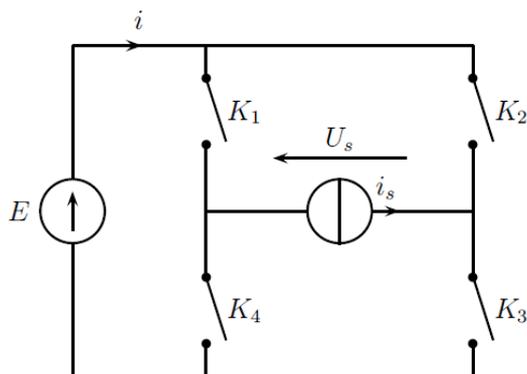


FIGURE 6 – Onduleur de tension à deux niveaux.

□ **23** — Il faut que i_s puisse être constant donc tous les interrupteurs ne peuvent être bloqués en même temps : il en faut toujours deux passants : l'un à gauche de la charge et l'autre à droite de la charge sur la figure 6.

◇ Si K_1 est passant, K_3 doit l'être aussi.

◇ Si K_2 est passant, K_4 doit l'être aussi.

Il faut que E puisse être constant, donc on ne doit pas court-circuiter E , ce qui impose que :

◇ si K_1 est passant, K_4 doit être bloqué ;

◇ si K_2 est passant, K_3 doit être bloqué.

On peut résumer l'ensemble dans le tableau ci-après.

	K_1	K_2	K_3	K_4
$U_{cm} > 0$	fermé	ouvert	fermé	ouvert
$U_{cm} < 0$	ouvert	fermé	ouvert	fermé

Cela donne les schémas électriques équivalents (voir figure 7), utiles pour la suite.

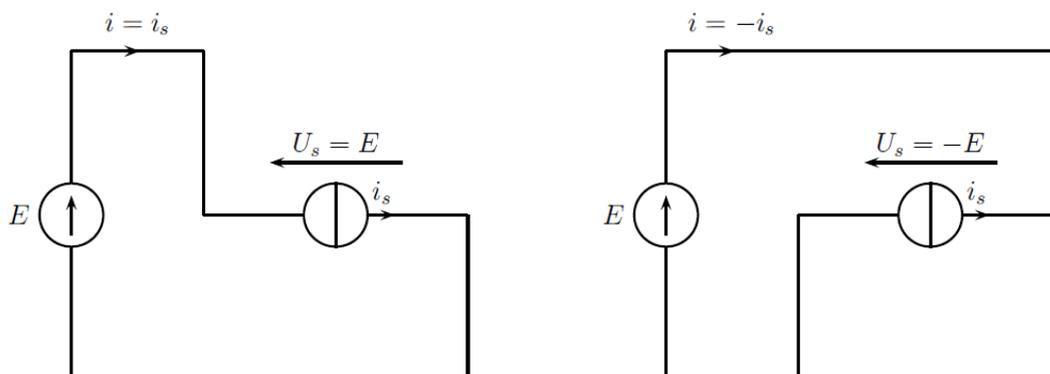


FIGURE 7 – Schémas électriques équivalents.

❑ 24 — L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime saturé car il n'y a pas de boucle de rétroaction négative pour assurer la stabilité du régime linéaire.

❑ 25 — Le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel idéal impose :

◊ $V_+ > V_- \Rightarrow U_{cm} = +V_{sat}$, donc

$$U_p < U_0 \Rightarrow U_{cm} = +V_{sat} \Rightarrow U_s = E \text{ (schéma de gauche sur la figure 7)}$$

◊ $V_+ < V_- \Rightarrow U_{cm} = -V_{sat}$, donc

$$U_p > U_0 \Rightarrow U_{cm} = -V_{sat} \Rightarrow U_s = -E \text{ (schéma de droite sur la figure 7)}$$

Cela permet d'obtenir graphiquement le tracé de $U_{cm}(t)$ (voir figure 8). Le tableau résumant les commutations des interrupteurs K_n permet de choisir le schéma équivalent au montage parmi les deux schémas de la figure 7, donc de trouver $U_s(t)$ (voir figure 9). Graphiquement, on trouve de manière évidente que :

$$T_s = T_p \tag{32}$$

❑ 26 — La valeur moyenne de U_s sur une période s'exprime comme une intégrale, qui elle même s'interprète comme une aire algébrique sous la courbe de $t \mapsto U_s(t)$ (aire de simples rectangles d'après la figure 9) :

$$\langle U_s \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} U_s(t) dt = \frac{1}{T_s} \times [t_1 \times E + (T_s - t_1) \times (-E)] = \alpha \times E + (1 - \alpha) \times (-E)$$

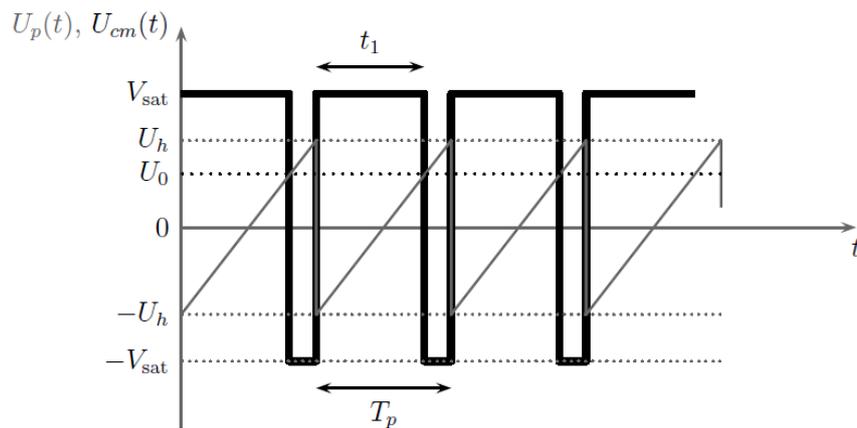


FIGURE 8 – Représentation de $U_{cm}(t)$.

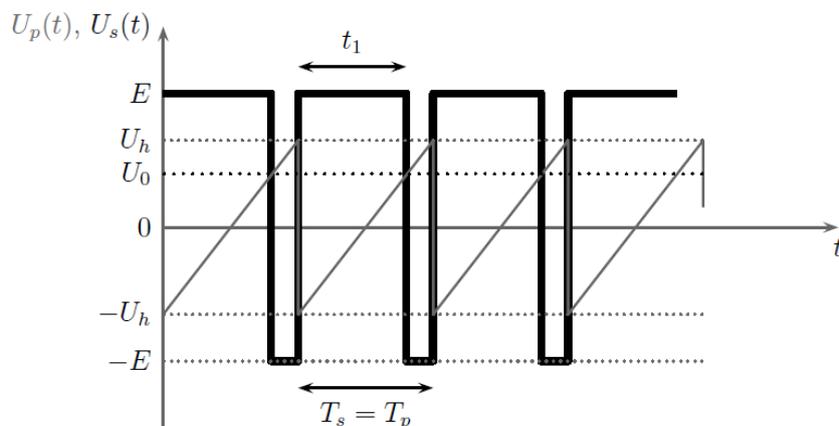


FIGURE 9 – Représentation de $U_s(t)$.

$$\Rightarrow \boxed{\langle U_s \rangle = (2\alpha - 1) E.} \quad (33)$$

Graphiquement, on peut exprimer la pente d'une rampe de la figure 8 de deux façons :

$$\frac{U_0 + U_h}{t_1} = \frac{2U_h}{T_s} \Rightarrow \alpha = \frac{t_1}{T_s} = \frac{U_0 + U_h}{2U_h} = \frac{\frac{U_0}{U_h} + 1}{2} \Rightarrow 2\alpha - 1 = \frac{U_0}{U_h}. \quad (34)$$

Des relations (33) et (34), on déduit :

$$\boxed{\langle U_s \rangle = \frac{U_0}{U_h} E.} \quad (35)$$

D'après la relation (33), il faut que $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $\boxed{U_0 = 0}$ pour que $\langle U_s \rangle = 0$.

□ 27 — Le réseau électrique délivre une tension sinusoïdale pure à la fréquence $f = 50$ Hz. Son spectre contient donc une seule raie à la pulsation $\omega = 2\pi f$. Pour y raccorder U_s , il faudrait que le spectre de U_s soit identique. Or, celui-ci contient de nombreuses raies spectrales car la décroissance des amplitudes A_n des harmoniques est lente ($A_n = \frac{2E}{n\pi}[1 - (-1)^n]$, voir figure 10). Il faudrait filtrer le spectre de U_s avant raccordement au réseau (filtrage passe-bas pour ne retenir que le fondamental à ω).

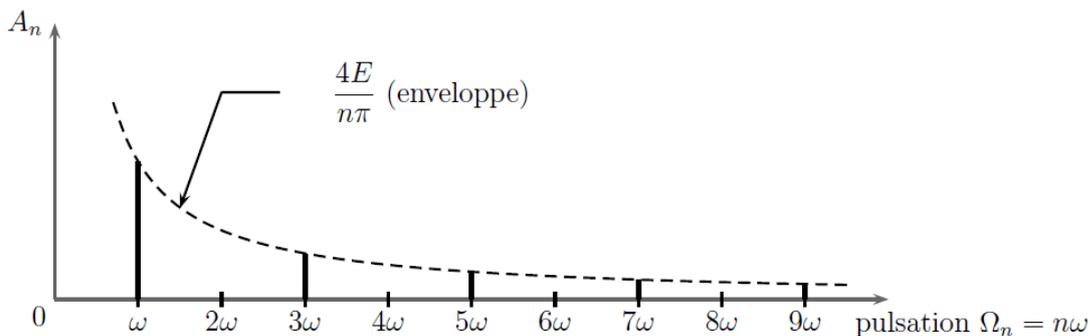


FIGURE 10 – Spectre en amplitude de la tension U_s .

Les harmoniques de haute fréquence créent des courants haute fréquence dans les fils. Or, plus la fréquence est élevée, plus l'effet de peau est prononcé : le courant se cantonne à la périphérie du fil. Tout se passe alors comme si le fil était de section plus faible : sa résistance effective augmente, donc l'effet Joule aussi, ce qui provoque des pertes d'énergie dans les lignes.

□ 28 — Sur l'intervalle $[0, T_p/2]$, $i_s = i$ et la loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par i_s :

$$E = L \frac{di_s}{dt} + Ri_s.$$

Sur $[T_p/2, T_p]$, l'étude est la même en changeant E en $-E$. Finalement :

$$\frac{di_s}{dt} + \frac{1}{\tau} i_s = \begin{cases} +\frac{E}{L} & \text{sur } [0, T_p/2] \\ -\frac{E}{L} & \text{sur } [T_p/2, T_p] \end{cases} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}. \quad (36)$$

La solution de l'équation homogène est de la forme $i_s = A \exp(-t/\tau)$. Il faut lui ajouter la solution particulière $\pm \frac{E}{R}$ sur chaque intervalle, donc :

$$\begin{cases} \text{sur } [0, T_p/2], & i_s = A \exp(-t/\tau) + \frac{E}{R} \\ \text{sur } [T_p/2, T], & i_s = B \exp(-t/\tau) - \frac{E}{R} \end{cases} \quad (37)$$

On détermine les constantes d'intégration A et B par les conditions initiales ($I_s = -I$ à $t = 0$ et $i_s = +I$ à $t = T_p/2$), ce qui donne :

$$\begin{cases} \text{sur } [0, T_p/2], & i_s = - \left[\frac{E}{R} + I \right] \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) + \frac{E}{R} \\ \text{sur } [T_p/2, T], & i_s = \left[\frac{E}{R} + I \right] \exp \left(-\frac{t-T_p/2}{\tau} \right) - \frac{E}{R} \end{cases} \quad (38)$$

A l'instant $t = T_p/2$, les deux expressions doivent donner $i_s = I$ car la bobine impose la continuité de i_s , donc :

$$I = - \left[\frac{E}{R} + I \right] \exp \left(-\frac{T_p}{2\tau} \right) + \frac{E}{R} \Rightarrow I = \frac{E}{R} \frac{1 - \exp(-\frac{T_p}{2\tau})}{1 + \exp(-\frac{T_p}{2\tau})}$$

□ **29** — Le chronogramme de i_s est une suite d'arcs d'exponentielles raccordés continûment. Par ailleurs, les schémas équivalents montrent que :

- ◇ sur $[0, T_p/2]$, $i = +i_s$;
- ◇ sur $[T_p/2, T_p]$, $i = -i_s$.

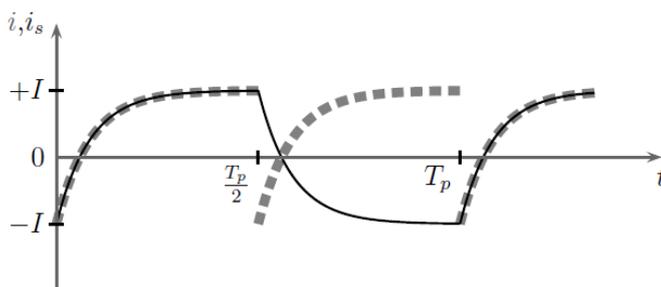


FIGURE 11 — Représentation des intensités i_s et i en fonction du temps (i_s en trait noir plein, i en traits tiretés gris).

Cela permet de déduire la représentation de i de celle de i_s (voir figure 11).

□ **30** — La figure 11 montre que l'intensité i_s change de signe sur chaque intervalle $[0, T_p/2]$ et $[T_p/2, T_p]$. Or, les interrupteurs K_n sont unidirectionnels (transistors), ce qui signifie qu'ils ne laissent passer le courant que dans un sens. Les diodes permettent que le courant puisse circuler dans l'autre sens lors de son changement de signe.

□ **31** — La loi des nœuds appliquée entre la résistance et la bobine permet d'écrire, en complexes :

$$\frac{U_R}{R} = \frac{U_s}{Z_L + R} \Rightarrow \underline{H} = \frac{U_R}{U_s} = \frac{R}{jL\omega + R} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} \quad (39)$$

Le gain et le déphasage s'écrivent :

$$G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \phi(\omega) = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right). \quad (40)$$

□ **32** — On déduit le développement en série de Fourier de U_R de celui de U_s et de l'action du filtre RL qui, en tant que filtre linéaire, affecte séparément chaque harmonique :

$$U_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{G(n\omega) \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n]}_{\stackrel{\text{déf.}}{=} b'_n} \sin(n\omega t + \phi(n\omega)).$$

Les amplitudes des harmoniques de U_R sont :

$$A'_n = |b'_n| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_c}\right)^2}} \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n].$$

Dès que $\frac{n\omega}{\omega_c}$ est grand devant 1, on peut négliger le 1 sous la racine, ce qui donne approximativement :

$$A'_n \simeq \frac{\omega_c}{\omega} \frac{2E}{n^2\pi} [1 - (-1)^n].$$

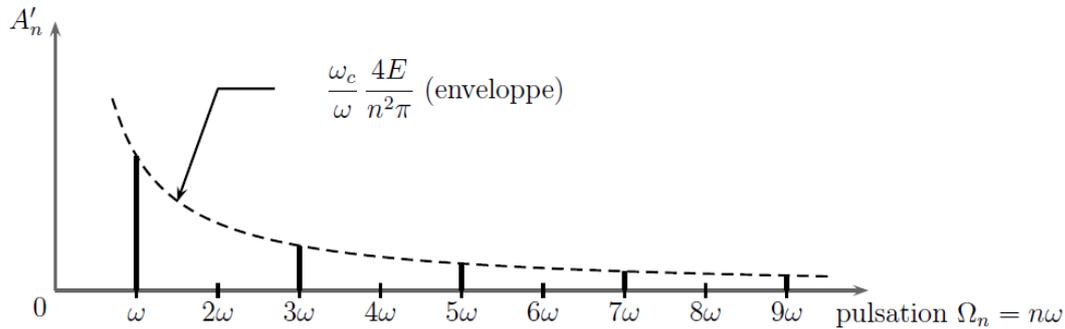


FIGURE 12 – Spectre en amplitude de la tension U_R .

La décroissance des amplitudes des harmoniques est proportionnelle à $\frac{1}{n^2}$. Ce spectre est donc moins riche en hautes fréquences (suite au filtrage passe-bas) que celui de U_s , ce qui est meilleur pour le raccordement au réseau électrique.