PSI

FONCTIONS USUELLES

I - FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

1) Arcsin

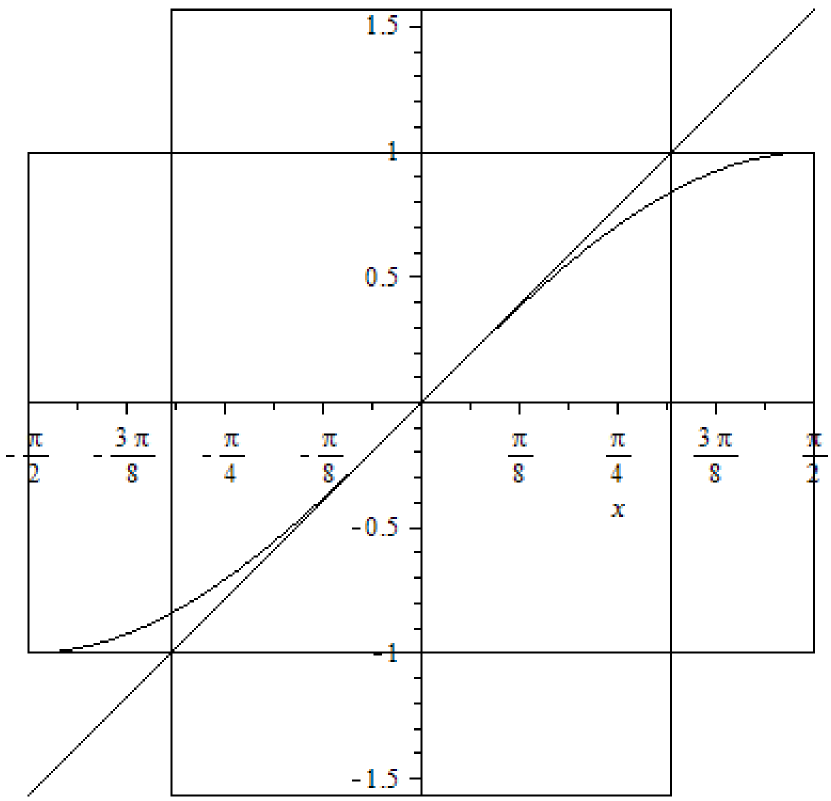
déf. *L'application* sin *est définie, continue et strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *donc bijective de cet intervalle sur son image* $[-1, 1]$.
Elle admet donc une application réciproque, notée arcsin, *définie, continue et strictement croissante de* $[-1, 1]$ *sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\left\{\begin{array}{c} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$$

Exemples : $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

Propriétés :
- arcsin est impaire.
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$ et $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Sinus et Arcsin



2) ***Arccos***

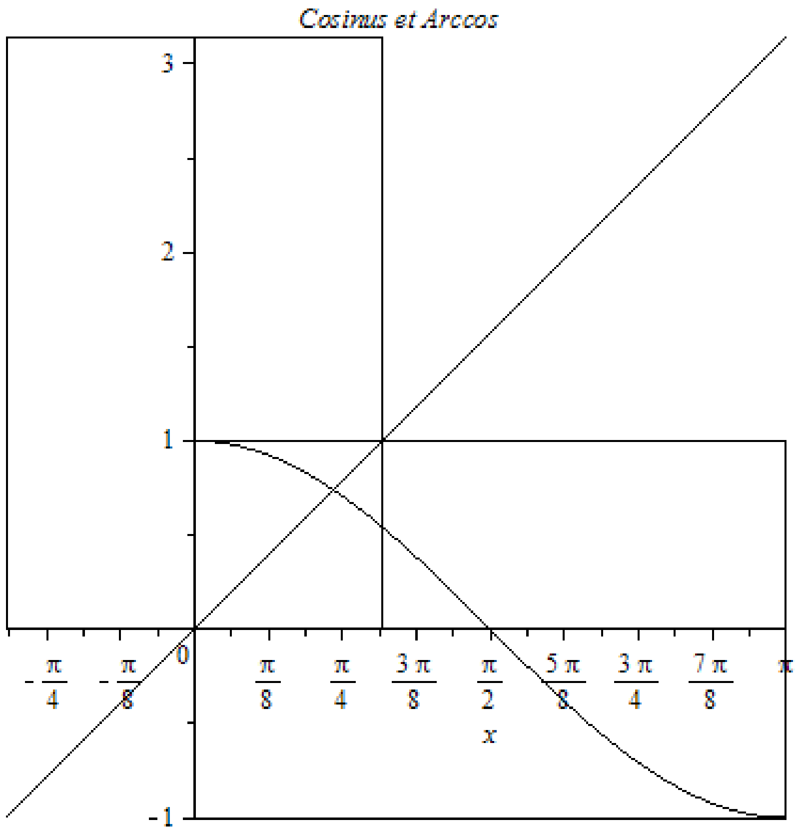
déf. *L'application* $\cos$ *est définie, continue et strictement décroissante sur* $[0, \pi]$, *donc bijective de cet intervalle sur son image* $[-1, 1]$.
Elle admet donc une application réciproque, notée $\arccos$, *définie, continue et strictement décroissante de* $[-1, 1]$ *sur* $[0, \pi]$.

$$\left\{\begin{array}{c} y = \arccos x \\ x \in [-1, 1] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{array}\right.$$

Exemples : $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$, $\arccos 1 = 0$

Propriétés :

- $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$.
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$ et $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- $\arccos$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.



3) ***Arctan***

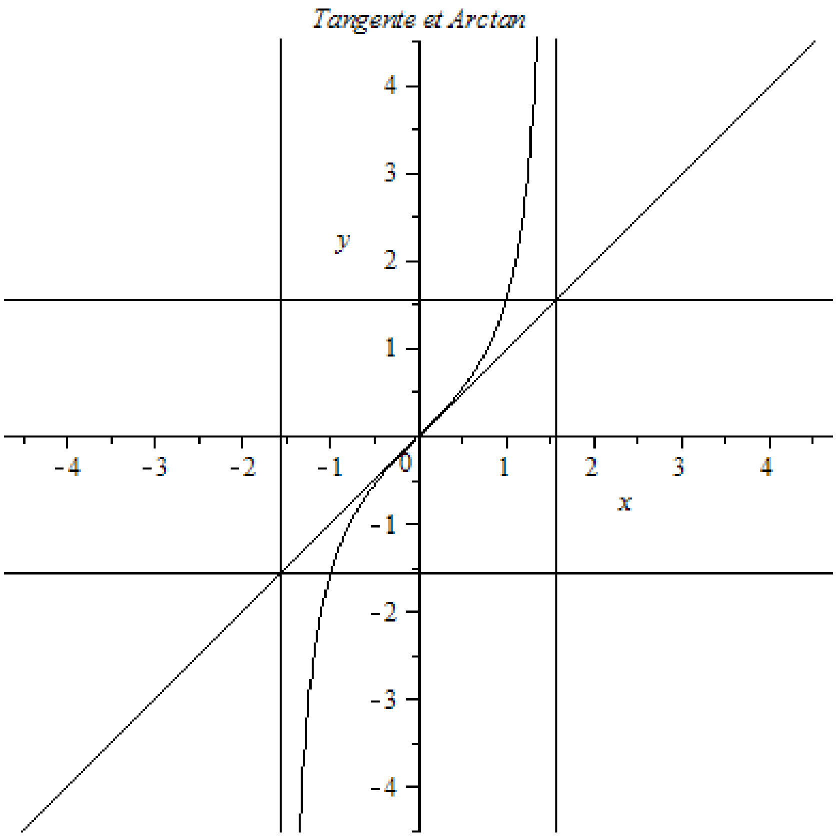
déf. *L'application* $\tan$ *est définie, continue et strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, *donc bijective de cet intervalle sur son image* $\mathbb{R}$.
Elle admet donc une application réciproque, notée $\arctan$, *définie, continue et strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Exemples : $\arctan 0 = 0$, $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Propriétés :

- $\arctan$ est impaire.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$ et $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \text{signe }(x) \times \frac{\pi}{2}$



II - FONCTIONS HYPERBOLIQUES

1) *cosinus et sinus hyperboliques*

déf. *Le cosinus hyperbolique est la fonction notée* ch *définie par :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \dfrac{\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}}{2}$.

Le sinus hyperbolique est la fonction notée sh *définie par :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{2}$.

ch est une fonction paire et sh une fonction impaire.

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{\,x}, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{\,-x}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- ch et sh sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.
- $\operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{2}$.

2) *tangente hyperbolique*

déf. *On définit la fonction tangente hyperbolique, notée* th, *de la manière suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}} = \frac{\mathrm{e}^{\,2x} - 1}{\mathrm{e}^{\,2x} + 1} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\,-2x}}{1 + \mathrm{e}^{\,-2x}}.$$

Propriétés :

- th est impaire, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{th}' = \left(\dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}\right)' = \dfrac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$.
- th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$