

①

$$\textcircled{1} \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \xrightarrow{\text{G.O.}} \oint_{PE \in \Sigma_r} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

② Tout plan contenant 0 est Π_S car la distribution est uniforme. En Π quelconque il passe une infinité de Π_S , tous contenant (0,1) : $\vec{E}(\Pi)$ est dans tous ces plans : $\vec{E}(\Pi) = E(\Pi) \vec{e}_r$.

③ La distribution est invariante par toute rotation de Θ ou Φ (en coordonnées sphériques) toujours grâce à son uniformité. Ainsi $E(\Pi) = E(r)$

④ Avec le théorème de Gauss et en choisissant $\Sigma_r \equiv$ sphère de centre 0 contenant Π :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint E(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \vec{e}_r \\ &= E(r) 4\pi r^2 \end{aligned}$$

et $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$ vaut :

②

$$1 \quad * \quad Q \text{ si } r > R$$

$$2 \quad * \quad Q \frac{r^3}{R^3} \text{ si } r < R$$

$$\text{d'où } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r ; \vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$$

$r > R$ $r < R$

$$\textcircled{3} \vec{E} = -\operatorname{grad} U \text{ d'où avec}$$

$$E(r) = -\frac{dU}{dr} \text{ il vient d'abord pour}$$

$$\underline{r > R} : U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{cte nulle car } U=0 \text{ à } r=\infty)$$

Puis, pour $r < R$: $U = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + C$; en utilisant

la continuité de U en $r=R$:

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\text{et } U = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) ; \underline{r < R}$$

$$\textcircled{4} E_1 = qU : \text{ en exprimant } dW, \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{e} = q\vec{E} \cdot d\vec{e}$$

$$dW = -q(\operatorname{grad} U \cdot d\vec{e})$$

$$dW = -q dU \text{ et avec } dE_1 = -dW,$$

on obtient bien $E_1 = qU$ (en prenant la constante nulle).

⑤ $E_2 = \iiint \frac{1}{2} \epsilon E^2 d\tau$, où ③

l'intégrale est calculée sur l'espace tout entier, puisque E ne s'annule qu'à l'infini.

Ainsi $E_2 = \int_0^\infty \frac{1}{2} \epsilon E^2(r) r^2 4\pi dr$ après intégration sur θ et φ .

Puis on "coupe" l'intégrale en deux:

$$E_2 = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi \epsilon^2 R^6) r^2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon^2 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$E_2 = \frac{1}{5} \frac{Q^2}{8\pi \epsilon R} + \frac{1}{8\pi \epsilon R} Q^2 \text{ d'où le résultat avec } R = 3/5.$$

⑥ i

q	m
$\vec{E}$	$\vec{G}_T$
$\frac{1}{4\pi \epsilon_0}$	$-G$
c	μ

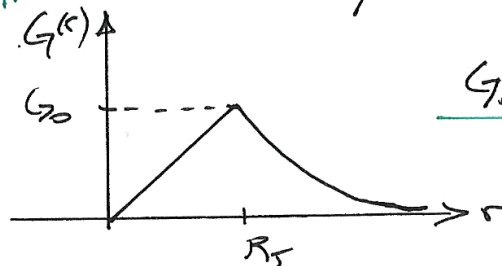
$\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon$ devient alors $\text{div} \vec{G} = -4\pi G \rho$ ④

et $\oint_{\Sigma_r} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$.

ii) a) Il suffit de poursuivre l'analogie en procédant comme ci-dessus et en remplaçant Q par M_T :

$r < R$ $\vec{G} = -G M_T r / R^3 \vec{e}_r$

$r > R$ $\vec{G} = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{e}_r$



$G_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}.$

⑦ Pour $r > R_T$, la symétrie sphérique étant conservée, les symétries planes et les invariances le sont aussi. Comme de plus M_{int} est le même, $G(r)$ est inchangé et G_0 aussi.

⑧ $G(r)$ varie linéairement de 0 à G_0 pour r variant de 0 à R_T . Appliquons le théorème de Gauss:

$$\oint_{\text{sphère } 0, r < R_1} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \mathcal{M}_{\text{int}}(r) / (-4\pi G) \text{ soit}$$

$$\oint_{R_1} -G_0 \sum dS = \mathcal{M}_{\text{int}}(r) / (-4\pi G),$$

$$-G_0 \frac{4\pi r^2}{R_1} = -\mathcal{M}_{\text{int}}(r) / 4\pi G.$$

soit $\mathcal{M}_{\text{int}}(r) = \frac{G_0}{G} \frac{r^3}{R_1}$ que l'on

peut écrire $\mathcal{M}_{\text{int}}(r) = \frac{3G_0}{4GR_1\pi} \frac{4}{3}\pi r^3$

soit $\mathcal{M}_{\text{int}}(r) = \mu_{\text{moyen}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

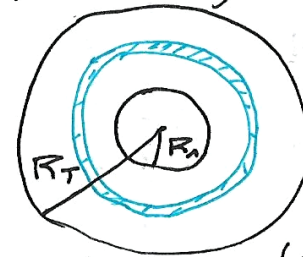
Cela correspond bien à un noyau dans lequel μ peut être prise égale à $\frac{3G_0}{4\pi G} \frac{1}{R_1} = \mu_{\text{moyen}}$ et donc à un noyau homogène à distribution de masse uniforme.

② * Comme $G(r) = G_0$ constant dans tout le manteau, $\mu(r)$ doit nécessairement décroître car nous savons très bien que pour $\mu = \text{cte}$, $G(r)$ croît (donc a fortiori si $\mu(r)$ croît...)

* Pour calculer $\mu(r)$ on considère

⑤

une "pellicule sphérique" constituée de l'intersection de deux sphères concentriques de rayons r et $r+dr$ (avec $R_1 \leq r < R_2$): on peut appliquer Gauss 2 fois:



Gauss 2 fois:

$$4\pi G \mathcal{M}_{\text{int}}(r) = G_0 4\pi r^2$$

$$4\pi G \mathcal{M}_{\text{int}}(r+dr) = G_0 4\pi (r+dr)^2$$

En faisant la différence:

$$\underbrace{\frac{d\mathcal{M}_{\text{int}}}{dr} dr}_{\mu(r) d\tau} \cdot 4\pi G = G_0 4\pi \underbrace{[(r+dr)^2 - r^2]}_{2r dr \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre}}$$

$$4\pi \mu(r) d\tau G = G_0 8\pi r dr$$

On $d\tau = 4\pi r^2 dr$ au 1^{er} ordre

et finalement $\mu(r) = \frac{G_0}{G} \cdot \frac{1}{2\pi r}$

Avec la divergence, on écrit directement, avec $\vec{G} = -G_0 \vec{e}_r$: $-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 G_0) = -4\pi G \mu(r)$ et on retrouve le résultat ci-dessus.

iii • $g_{ST} = \frac{GM_s}{L^2}$ en négligeant R_T devant L (7)

$g_{TS} = \frac{GM_T}{L^2}$ en négligeant R_s devant L .

$g_{ST} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$; $g_{TS} = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$.

• $E_1 = M_T \cdot \frac{M_s}{L} \cdot (-G)$ par analogie avec (3) (pour $r > R$).

$E_1 = -5,3 \cdot 10^{33} \text{ J}$

Par analogie avec la question (5) :

• $E_{2T} = -\frac{3}{5} \frac{M_T^2 G}{R_T} = -2,3 \cdot 10^{32} \text{ J}$

• $E_{2s} = -\frac{3}{5} \frac{M_s^2 G}{R_s} = -2,3 \cdot 10^{41} \text{ J}$.

(sans refaire le calcul).

• $E_{2TS} \approx E_{2s}$ compte tenu des valeurs

ci-dessus ; on voit bien que la Terre n'intervient pas dans l'énergie du système solaire.

R : Même Jupiter avec ses 320 masses

Terrestres ne représente que 1% de l'énergie propre du soleil. (8)

Stabilité thermique.

II.1.1. L'étoile est constituée d'atomes

d'hydrogènes : son énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des atomes.

$E_c = N_H \cdot \frac{M_s}{M_H} \cdot \frac{3}{2} kT$; or $k N_A = R$

et $E_c = \frac{3}{2} \frac{M_s}{M_H} RT$. Son énergie totale est la somme de E_c

et de son énergie gravitationnelle propre.

II.1.2. La somme $E_c + E_{2s}$ doit être négative pour correspondre à un état lié ce qui signifie bien que le soleil ne sera pas en expansion infinie (état de diffusion).

II.1.3 et 4. Il faut donc $\frac{3}{2} \frac{M_s}{M_H} RT < \frac{3}{5} \frac{GM_s^2}{R_s}$

soit $T < T_{\max} = \frac{2GM_s M_H}{5R_s R} = 9 \cdot 10^6 \text{ K}$

II.2.1. Pour que l'objet et l'étoile restent liés, il faut que E_T reste négative ou nulle (état lié) soit pour un objet de masse m :

$$\frac{1}{2} m v_{\min}^2 - \frac{m M_s}{R_s} G = 0$$

et $v_{\min} = \sqrt{\frac{2 G M_s}{R_s}}$: c'est la vitesse de libération.

II.2.2. Les particules de gaz tournent à la même vitesse angulaire que l'étoile. Ainsi celles qui sont à la surface ont une vitesse ΩR_s ; avec II.2.1 il vient $\Omega R_s < v_{\min}$ pour que la particule de gaz reste sur l'étoile, soit

$$\Omega < \sqrt{\frac{2 G M_s}{R_s^3}}$$

II.2.3. Or $\Omega_s = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ et $\sqrt{\frac{2 G M_s}{R_s^3}} = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$

le soleil est stable (ouf!)

II.2.4. Il n'y a pas de libération possible

puisque aucune particule matérielle ne peut voir sa vitesse excéder c : l'étoile est stable.

$$v_e > c \Rightarrow \frac{2 G M}{R} > c^2$$

$$M/R > \frac{c^2}{2G} ; \text{ comme } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{il vient } \frac{4}{3}\pi \rho R^2 > \frac{c^2}{2G}$$

$$\text{soit } \rho > \frac{3 c^2}{8 \pi G R^2} ; \underline{\rho = 3,3 \cdot 10^8 \text{ kg m}^{-3}}$$

Cela correspond à 330 kg par cm^3 . Par comparaison l'étoile la plus dense est l'osmium (c'est un métal) dont ρ_{os} vaut $\rho_{\text{os}} = 0,02 \text{ kg par cm}^{-3}$, soit une étoile 1,5 $\cdot 10^4$ + dense que le métal le + dense sur terre...

II.3.1. $\vec{e}_g - \vec{\text{grad}} P = \vec{0}$ (cf. cours d'hydrostatique)

II.3.2. En coordonnées sphériques et en projection sur $\vec{r}$:

$\rho(r) = \frac{dP}{dr}$, où $g(r)$ est donné par le raisonnement suivant :

ρ est en fonction de r ; cependant les (11) plans de symétrie et les invariances sont inchangées par rapport au début du problème où ρ est uniforme. Donc le calcul effectué avec le théorème de Gauss est toujours valable:

$$g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G \Pi(r), \text{ soit}$$

$$g(r) = -G \frac{\Pi(r)}{r^2} \quad \text{on a alors}$$

$$\frac{dP}{dr} = -G \rho(r) \frac{\Pi(r)}{r^2}.$$

II.3.3. On cherche T_c au centre de l'étoile: on peut essayer d'utiliser la relation ci-dessus pour avoir $P_c = P(0)$ puis écrire la relation des G.P. au centre de l'étoile:

$$\frac{P_c}{\rho_c} = \frac{R T_c}{\mu_H} \quad \text{avec} \quad \rho_c = \rho(0)$$

(12) La relation $\frac{dP}{dr}$ est intégrable telle quelle; faisons les choses en ordre de grandeur:

$P(0) = P_c$, $P(R_s) = 0$: à la limite de l'étoile on trouve le vide interstellaire.

pressions: $\frac{dP}{dr} \sim \frac{P_c}{R_s}$

Puis $\rho(r) \sim \rho_{\text{moyen}} = \frac{\mu_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3}$

et enfin $\frac{\Pi(r)}{r^2} \sim \frac{\mu_s}{R_s^2}$

$$\frac{P_c}{R_s} = G \frac{3\mu_s^2}{4\pi R_s^5} \quad \text{soit} \quad P_c = \frac{3\mu_s^2}{4\pi R_s^4} G$$

$$\text{Enfin} \quad T_c = \frac{\mu_H}{R} \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{\mu_H}{R} \frac{3\mu_s^2 \frac{4}{3}\pi R_s^3}{4\pi R_s^4 \cdot \mu_s}$$

avec $\rho_c \sim \rho_{\text{moyen}}$.

$$T_c = G \frac{\mu_H}{R} \frac{\mu_s}{R_s} = 23 \text{ millions de degrés};$$

l'ordre de grandeur est très bon pour un résultat aussi simpliste...