PSI - PSI*
DM N°5

Electrostatique et gravitation
D'après Centrale et Banque PT

Données utiles à la résolution

Permittivité électrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Masse de la Terre :	$M_T = 6,0.10^{24}\ kg$
Masse du Soleil :	$M_S = 2,0.10^{30}\ kg$
Rayon terrestre moyen :	$R_T = 6,4.10^{6}\ m$
Rayon solaire moyen :	$R_S = 7,0.10^{8}\ m$
Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil :	$L = 1,5.10^{11}\ m$
Durée d'une révolution du Soleil sur lui-même :	$\Theta_S = 2,6.10^{6}\ s$
Constante de gravitation universelle :	$G = 6,67.10^{-11}\ N.m^{2}.kg^{-2}$
Constante des gaz parfaits :	$\Re = 8,31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$
Constante d'Avogadro :	$Na = 6,02.10^{23}.mol^{-1}$
Masse molaire de l'élément hydrogène :	$M_H = 1,0.10^{-3}\ kg.mol^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3,00.10^{8}\ m.s^{-1}$

Pour un champ de vecteur quelconque, la divergence en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\mathrm{div}\vec{A}(M,t) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Première partie : Champ électrostatique et champ de gravitation

1. Enoncer l'équation de Maxwell-Gauss et en déduire l'expression générale du théorème de Gauss.

2. On considère une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en volume. On note Q la charge totale qu'elle porte.
   a. Indiquer quels sont les plans de symétrie de cette distribution de charge. En déduire la direction du champ électrostatique qu'elle produit en un point M quelconque de l'espace.
   b. Indiquer quelles sont les invariances de cette distribution ; en déduire la dépendance du champ qu'elle produit vis-à-vis des coordonnées d'espace.
   c. Calculer alors l'expression du champ créé par la distribution en tout point M de l'espace.

3. En déduire l'expression du potentiel électrostatique U(M) en tout point de l'espace ; on choisira arbitrairement U nul à l'infini.

4. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle d'interaction, E_1, entre la distribution de charge précédente et une charge ponctuelle q placée en un point M situé à une distance r de son centre.

5. On rappelle que l'énergie volumique électrostatique associée à un champ $\overrightarrow{E(M)}$ est donnée par l'expression $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M)$. Montrer alors que l'énergie propre électrostatique, notée E_2, de la sphère chargée précédente peut s'écrire $E_2 = \frac{kQ^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$; déterminer k.

6. Analogie électrostatique-gravitation

i. Dresser un tableau présentant les analogies entre les grandeurs électrostatiques et les grandeurs gravitationnelles. En déduire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masses quelconques.

ii. Application : dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie dans tout le volume.

a) Déterminer le champ gravitationnel terrestre $\mathbf{G}_T$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement $\|\mathbf{G}_T\|$ en fonction de $r = OM$.

b) Calculer $G_0 = \|\mathbf{G}_T\|$ à la surface de la Terre.

En réalité la masse M_T n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on suppose la symétrie sphérique conservée, les variations de $\|\mathbf{G}_T\|$ sont représentées sur la figure 1 avec $R_1 = 3,50 \cdot 10^3$ km.

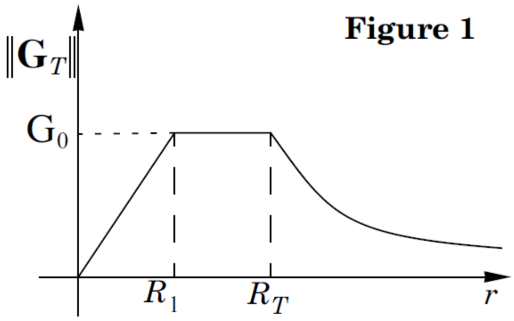

Figure 1

c) Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.

d) Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre $(0 < r < R_1)$ comme homogène. Calculer sa masse volumique moyenne.

e) Prévoir qualitativement si la masse volumique est une fonction croissante ou décroissante dans le manteau, c'est-à-dire pour $R_1 < r < R_T$. Donner l'expression de la masse volumique du manteau : $\mu_{manteau}(r)$. On pourra soit utiliser directement la divergence en coordonnées sphériques (voir données) ou appliquer le théorème de Gauss à une surface fermée constituée de deux sphères concentriques de rayons r et r + dr.

iii. On revient à la description du ii.a) d'une Terre dont la masse M_T est uniformément répartie en volume.

Application numérique : calculer l'intensité g_{ST} du champ de gravitation créé par le Soleil à la surface de la Terre puis l'intensité g_{TS} du champ de gravitation créé par la Terre à la surface du Soleil.

Déterminer l'énergie d'interaction gravitationnelle entre la Terre supposée ponctuelle et le Soleil.

Application numérique.

Déterminer l'énergie propre gravitationnelle du Soleil et de la Terre, notées respectivement E_{2S} et E_{2T} .

Application numérique : calculer ces énergies ainsi que l'énergie E_{2TS} de l'ensemble Terre-Soleil en négligeant, pour le calcul de l'énergie d'interaction, leurs rayons devant la distance qui les sépare. Commenter les résultats.

Deuxième partie : Stabilité d'une étoile sphérique

II.1. <u>Stabilité thermique</u>.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique homogène de rayon R et de masse M constituée d'atomes d'hydrogène de masse molaire M_H dans l'état de gaz parfait en équilibre thermique à la température uniforme T. Chaque atome possède l'énergie cinétique $e_c = \frac{3}{2} kT$ avec $k = \frac{\Re}{Na}$.

II.1.1. Calculer l'énergie cinétique E_C de l'étoile.

II.1.2. On rappelle que pour qu'un système soit stable mécaniquement, il faut que son énergie mécanique totale reste négative : les composantes du système sont alors dans un état lié.
En déduire une condition suffisante pour que le rayon du soleil reste fini, c'est-à-dire pour que le soleil ne soit pas en expansion infinie.

II.1.3. En déduire la valeur maximale de la température T qui satisfait la condition précédente.

II.1.4. Application numérique : calculer cette température maximale.

II.2. <u>Stabilité dynamique</u>.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique homogène de rayon R et de masse M en rotation propre de période constante autour de l'un de ses diamètres et constituée par un gaz de particules entraînées à la même vitesse angulaire que celle de l'étoile.

On note Ω la vitesse angulaire ci-dessus.

II.2.1. Déterminer la vitesse minimale que doit acquérir un objet à la surface de l'étoile pour être libéré de celle-ci (on pourra utiliser le rappel de II.1.2.)

II.2.2. Montrer alors que la condition de stabilité dynamique de l'étoile est $\Omega < \Omega_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2GM}{R^3}}$.

II.2.3. Application numérique : le Soleil vérifie-t-il la condition de stabilité dynamique? Justifier votre réponse par des valeurs numériques.

II.2.4. Que se passe-t-il pour une étoile lorsque la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de la lumière? Quelle est la condition sur le rapport $\frac{M}{R}$ pour de tels corps? En déduire la condition sur la masse volumique de l'étoile.

II.2.5. Application numérique : calculer, pour une étoile de rayon R_S, la masse volumique minimale pour que la vitesse de libération soit supérieure à la vitesse de la lumière. Commenter cette valeur numérique.

II.3. <u>Aspect hydrostatique</u>.

On utilise le modèle d'une étoile sphérique de rayon R et de masse M, sans rotation propre, dont la masse volumique $\rho(r)$, la pression interne $P(r)$ et la température $T(r)$ ne dépendent que de la distance r au centre de l'étoile. De plus, l'étoile est assimilée à un gaz parfait constitué d'atomes d'hydrogène en équilibre hydrostatique, c'est-à-dire que chaque élément de volume de matière dV est en équilibre sous l'effet des forces gravitationnelles et des forces de pression.

II.3.1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides.

II.3.2. Montrer que $\frac{dP}{dr} = - G\,\frac{\rho(r)M(r)}{r^2}$ où *M(r)* est la masse contenue dans la sphère de rayon r.

II.3.3. **Résolution de problème**

On souhaite obtenir un ordre de grandeur pour la température T_C au centre du soleil.
Proposer un modèle simple, utilisant notamment les hypothèses et résultats précédents, qui permette de calculer numériquement cette valeur.
Toutes les propositions cohérentes seront prises en compte dans le barème.
Pour information, on indique que la valeur actuellement admise est de l'ordre de 15 millions de °C ; vous pourrez ainsi la confronter avec votre résultat.