Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2020-2021.
Samedi 21 mai 2022
Durée : 4 heures.

Instructions générales :
Aucun document n'est autorisé.
L'emploi d'une calculatrice est interdit.
Dans chaque question, les résultats demandés seront **encadrés**, les étapes des méthodes mises en oeuvre et les résultats intermédiaires seront mis en évidence par un **surlignement**, une ligne sautée ou tout autre moyen de votre choix.
Vous êtes enfin invités à porter une attention particulière à la rédaction et à l'orthographe : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Barème indicatif sur 54 points (donnant une idée du temps respectif qu'il est bon de consacrer à chaque exercice).
Problème 1 : 15 points ;
Problème 2 : 39 points.

Avertissement : les questions délicates voire très délicates ou réservées aux seuls candidats aux classes étoilées sont indiquées par une ($\star$) ou deux ($\star\star$). Les étudiants ne se destinant pas aux classes étoilées sont encouragés à traiter en priorité les questions non étoilées : les traiter avec soin permet d'avoir une très bonne note.

Ce DS sera IMPERATIVEMENT rendu sur 3 copies séparées :

- le Problème 1 sera rendu sur la COPIE 1,
- les Parties I et II du Problème 2 seront rendues sur la COPIE 2,
- les Parties III et IV du Problème 2 seront rendues sur la COPIE 3.

Problème 1 (d'après CCP 2022, filière PC) (COPIE 1)

On dispose d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant Pile avec probabilité 1/2 et donnant Face avec probabilité 1/2). On considère une succession infinie de lancers indépendants. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement "le k-ième lancer de la pièce donne Pile" et F_k l'événement "le k-ième lancer de la pièce donne Face".
On appelle **série** une succession de lancers donnant le même côté de la pièce. La série n^o1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n^o2 commence au lancer suivant la fin de la série n^o1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Voici un exemple pour illustrer la définition des séries données ci-dessus

Exemple : $\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série 3}} \cap F_8 \cap \cdots$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Ainsi, sur l'exemple précédent, on a

$$N_1 = N_2 = 1,\ N_3 = 2,\ N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \text{ et } N_8 = 4.$$

(1) Déterminer la loi de N_1.
(2) Déterminer la loi de N_2 puis l'espérance et la variance de N_2.
(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'univers-image de la variable aléatoire N_n.
(4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(N_n = 1) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(N_n = n)$.

Dans les questions (6) et (7), on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

(6) $(\star)$
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$.
 (a) Justifier l'égalité d'événements

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

 (b) En déduire que

$$\mathbb{P}\big((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n = k) \cap P_n\big).$$

Dans la suite, on admet que l'on a de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\big) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n = k) \cap F_n\big) \\
\mathbb{P}\big((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\big) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n = k-1) \cap P_n\big) \\
\mathbb{P}\big((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\big) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n = k-1) \cap F_n\big).
\end{aligned}$$

(7) (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de la famille d'événements

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, P_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}).$$

 (b) Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1).$$

(8) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n le polynôme

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k) X^k.$$

 (a) Montrer que $G_1 = X$.
 (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $G_n(1)$.
 (c) Exprimer $\mathbb{E}(N_n)$ à l'aide de $G_n'(1)$.
 (d) $(\star)$
 Exprimer $G_n''(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(N_n)$ et de $\mathbb{E}(N_n^2)$.
 En déduire une expression de la variance $\mathbb{V}(N_n)$ de N_n en fonction de $G_n'(1)$ et de $G_n''(1)$.
 (e) A l'aide de (7b), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_{n+1} = \frac{X+1}{2} G_n.$$

 (f) En déduire l'expression de G_n.
 (g) $(\star)$
 En déduire enfin la loi de N_n puis l'espérance de N_n.

(9) *Question bonus* $(\star\star)$.
Retrouver la loi de N_n à l'aide d'un raisonnement direct de nature combinatoire.

Problème 2 (d'après BCE 2022, option économique)

Ce problème comporte 4 parties. Le résultat de la Partie I est utilisé dans la Partie IV. La Partie IV est indépendante de la Partie III.

Partie I. Une suite célèbre. (COPIE 2)

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

(1) Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.
(2) Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
(3) Qu'en déduit-on quant à la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

Pour la suite du problème, on admettra que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans toute la suite du problème, on note $f\ :\,]-\infty,1[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in\,]-\infty,1[\,,\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Partie II. Etude de la fonction f. (COPIE 2)

(1) Soit $u\ :\,]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x > 0,\ u(x) = x\ln(x).$$

  (a) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer u' et u''.
  (b) Etudier la convexité de u.
  (c) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de u au point d'abscisse 1.
  (d) En déduire que

$$\forall x > 0,\ 1 - x + x\ln(x) \geq 0$$

  puis que

$$\forall t \in\,]-\infty,1[\,,\ v(t) = \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0.$$

(2) Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$.
(3) Pour $t \neq 0$, exprimer $f'(t)$ à l'aide de $v(t)$, puis déterminer le signe de $f'(t)$.
(4) En déduire les variations de f.
(5) Déterminer un équivalent puis la limite de f en $-\infty$.
(6) Déterminer la limite de f en 1.
(7) Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to 0} f'(t)$.
(8) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.
(9) Tracer l'allure du graphe de f dans un repère orthonormé.

Partie III. Une équation différentielle. (COPIE 3)

Soit (E) l'équation différentielle

$$t(1-t)y' + (1-t)y = 1.$$

(1) Résoudre (E) sur $]0,1[$.
(2) Donner de même, sans refaire tous les détails du calcul, les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$.
(3) Déterminer les solutions de (E) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

Partie IV. Etude d'une primitive de f. (COPIE 3)

On définit la fonction $L\ :\,]-\infty,1[\to\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in\,]-\infty,1[\,,\ L(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que L est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty,1[$.
(2) Pour $x \in\,]-\infty,1[$, déterminer le signe de $L(x)$.

(3) *Etude de L en* 1.

(a) A l'aide d'un changement de variables très simple, montrer que

$$\forall (A,x) \in]0,1[^2,\ \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{1-x}^{1-A} \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]0,1[$:

$$\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) + \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.$$

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $h_k\ :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]0,1],\ h_k(t) = t^k \ln(t)$$

se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varepsilon > 0$, calculer à l'aide d'une intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que

$$\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

(e) Calculer de même

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = l.$$

On écrira dans la suite $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = l$ *même si la fonction* ln *ne se prolonge pas par continuité en* 0.

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]0,1[\,,\ g_n(t) = \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

(g) ($\star$)
Montrer que $M = \sup_{t\in[0,1]} \frac{t|\ln(t)|}{1-t}$ existe dans $\mathbb{R}$ et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

(h) ($\star\star$)
Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to 1} L(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire enfin que

$$\lim_{x\to 1} L(x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

(4) (a) Montrer que la fonction

$$x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$$

est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée. *Le résultat se simplifie beaucoup !*

(b) En déduire que

$$\forall x \in]-1,1[,\ L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2).$$

(c) En déduire enfin la valeur de $L(-1)$.

CORRIGÉ

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé. Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne vous sembleront pas claires...n'hésitez pas à me questionner pour plus de précisions !*

Problème 1 (d'après CCP 2022, filière PC)

(1) La variable aléatoire N_1 est constante égale à 1. On a donc $\boxed{\mathbb{P}(N_1 = 1) = 1}$.

(2) L'univers-image de N_2 est $\{1, 2\}$. De plus

$$(N_2 = 1) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2) \text{ et } (N_2 = 2) = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2).$$

Par indépendance des lancers et incompatibilité, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(N_1 = 1) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

et de même

$$\boxed{\mathbb{P}(N_2 = 2) = \frac{1}{2}}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(N_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}.$$

Puis à l'aide de la formule de Koenigs et du théorème de transfert :

$$\boxed{\mathbb{V}(N_2) = \mathbb{E}(N_2^2) - (\mathbb{E}(N_2))^2 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}}.$$

(3) Lors des n lancers, il peut y avoir entre 1 et n séries. L'univers-image de la variable aléatoire N_n est donc $\boxed{[\![1, n]\!]}$.

(4) On a de suite

$$(N_n = 1) = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n).$$

Par indépendance et incompatibilité, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(N_n = 1) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

(5) On a de même

$$(N_n = n) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cdots) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cdots)$$

puis à nouveau

$$\boxed{\mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

(6) (a) L'événement $(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$ signifie qu'il y a k séries lors des n premiers lancers et que le n-ième lancer est Pile. Comme le $(n+1)$-ième lancer est aussi Pile, on ne démarre pas une nouvelle série lors du $(n+1)$-ième lancer et on a donc $N_{n+1} = k$. Ainsi

$$(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1} \subset (N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Réciproquement, l'événement $(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$ signifie que l'on a k séries lors des $n+1$ premiers lancers et qu'on n'a pas entamé de nouvelle série entre le lancer n et le lancer $n+1$. Ceci signifie qu'il y a déjà k séries lors des n premiers lancers. Et donc

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} \subset (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Finalement, $\boxed{(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1} \subset (N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}}$.

(b) D'après ce qui précède

$$\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap P_n\cap P_{n+1}\big)=\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap P_n\cap P_{n+1}\big).$$

Or, la variable aléatoire ne dépend que des événements P_i et F_i avec $i\leq n$. D'après le lemme des coalitions, les événements $(N_n=k)\cap P_n$ et P_{n+1} sont donc indépendants et on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap P_n\cap P_{n+1}\big)=\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap P_n\big)\times\mathbb{P}(P_{n+1})=\frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap P_n\big)}.$$

Les identités suivantes, admises par l'énoncé, se démontrent de la même façon en remarquant que si on a F_n et P_{n+1}, on démarre une nouvelle série entre le lancer n et le lancer $n+1$ et on donc $N_{n+1}=N_n+1$ dans ce cas. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap F_n\cap F_{n+1}\big) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap F_n\big)\\
\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap P_n\cap F_{n+1}\big) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k-1)\cap P_n\big)\\
\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap F_n\cap P_{n+1}\big) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k-1)\cap F_n\big).
\end{aligned}$$

(7) (a) La famille d'événements

$$(P_n\cap P_{n+1},F_n\cap F_{n+1},P_n\cap F_{n+1},F_n\cap P_{n+1})$$

est <u>un système complet d'événements</u> : ces événements sont deux à deux incompatibles et recouvrent toutes les issues possibles des lancers n et $n+1$.

(b) D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{n+1}=k) &= \mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap P_n\cap P_{n+1}\big)+\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap F_n\cap F_{n+1}\big)\\
&\quad+\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap P_n\cap F_{n+1}\big)+\mathbb{P}\big((N_{n+1}=k)\cap F_n\cap F_{n+1}\big)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap P_n\big)+\frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap F_n\big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k-1)\cap P_n\big)+\frac{1}{2}\mathbb{P}\big((N_n=k-1)\cap F_n\big).
\end{aligned}$$

Or, (P_n,F_n) est aussi un système complet d'événements donc

$$\mathbb{P}(N_n=k)=\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap P_n\big)+\mathbb{P}\big((N_n=k)\cap F_n\big)\text{ et }\mathbb{P}(N_n=k-1)=\mathbb{P}\big((N_n=k-1)\cap P_n\big)+\mathbb{P}\big((N_n=k-1)\cap F_n\big).$$

On en déduit bien que

$$\boxed{\mathbb{P}(N_{n+1}=k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n=k)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n=k-1)}.$$

(8) (a) D'après (1), on a de suite $\boxed{G_1=X}$.

(b) On a à nouveau de suite

$$\boxed{G_n(1)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(N_n=k)=1}.$$

(c) Et de même

$$\boxed{G_n'(1)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(N_n=k)=\mathbb{E}(N_n)}.$$

(d) On a

$$G_n''=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(N_n=k)k(k-1)X^{k-2}$$

donc

$$\begin{aligned}
G_n''(1) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\mathbb{P}(N_n=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}k^2\mathbb{P}(N_n=k)-\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(N_n=k)\\
&\underset{\text{Transfert}}{=} \mathbb{E}(N_n^2)-G_n'(1)\\
&\underset{\text{Koenigs}}{=} \mathbb{V}(N_n)+(\mathbb{E}(N_n))^2-G_n'(1)\\
&= \mathbb{V}(N_n)+(G_n'(1))^2-G_n'(1).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{V}(N_n)=G_n''(1)-(G_n'(1))^2+G_n'(1)}.$$

(e) On a à l'aide de (7b) :

$$\begin{aligned}
G_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(N_{n+1}=k)X^k\\
&\underset{(7b)}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(N_n=k)X^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(N_n=k-1)X^k\\
&\underset{\mathbb{P}(N_n=n+1)=0}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(N_n=k)X^k+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(N_n=j)X^{j+1}\\
&\underset{\mathbb{P}(N_n=0)=0}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(N_n=k)X^k+\frac{X}{2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(N_n=j)X^{j}\\
&= \frac{X+1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(N_n=j)X^j\\
&= \frac{X+1}{2}G_n.
\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G_{n+1}=\frac{X+1}{2}G_n.$$

(f) On en déduit de suite que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G_n=\left(\frac{X+1}{2}\right)^{n-1}G_1=\left(\frac{X+1}{2}\right)^{n-1}X}.$$

(g) A l'aide du binôme de Newton, on en déduit que

$$G_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}X^{k+1}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}X^j.$$

Comme deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients le sont, on en déduit que

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(N_n=k)=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}}.$$

On en déduit aussi que

$$\boxed{\mathbb{E}(N_n)=G_n'(1)=\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}}.$$

Ce n'était pas demandé mais on a aussi $G_n''(1)=\dfrac{n^2+n-2}{4}=\dfrac{(n+1)(n-2)}{4}$ et à l'aide de (8b), on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{V}(N_n)=\frac{n-1}{4}}.$$

(9) *Question bonus.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Pour avoir $N_n = k$, il faut qu'il y ait $k-1$ changements de côtes lors des n lancers. Ces $k-1$ changements peuvent avoir lieu aux lancers $2, 3, \dots, n$. Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ façons de fixer la position de ces changements de côtés. Ces positions étant fixées, il y a deux suites de lancers possibles réalisant ces changements suivant que la première série est une série de Piles ou une série de Faces. Ces deux événements étant de probabilité $1/2^n$, on a donc bien

$$\boxed{\mathbb{P}(N_n = k) = 2 \times \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}}.$$

Problème 2 (d'après BCE 2022, option économique)

Ce problème comporte 4 parties. Le résultat de la Partie I est utilisé dans la Partie III. La Partie IV est indépendante de la Partie III.

Partie I. Une suite célèbre.

(1) On a $\boxed{u_1 = 1,\, u_2 = \frac{5}{4},\, v_1 = 2 \text{ et } v_2 = \frac{7}{4}}$.

(2) La suite (u_n) est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

La suite (v_n) est décroissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0.$$

Enfin,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Tout ceci montre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(3) On en déduit-on que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite réelle.
Comme l'admet l'énoncé, cette limite vaut $\pi^2/6$, résultat que vous démontrerez au moins une fois avant les concours.

Partie II. Etude de la fonction f.

(1) (a) La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
On a

$$\boxed{\forall x > 0, u'(x) = 1 + \ln(x) \text{ et } u''(x) = \frac{1}{x}}.$$

(b) Comme u'' est à valeurs positives, la fonction u est convexe sur $]0, +\infty[$.

(c) Comme $u(1) = 0$ et $u'(1) = 1$, l'équation de la tangente au graphe de u au point d'abscisse 1 est $\boxed{y = x - 1}$.

(d) Le graphe d'une fonction convexe étant situé au-dessus de ses tangentes, on en déduit que

$$\forall x > 0,\, x\ln(x) \geq x - 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{1 - x + x\ln(x) \geq 0}.$$

Pour $t < 1$, on peut appliquer l'inégalité précédente à $x = 1 - t > 0$. On en déduit que

$$t + (1-t)\ln(1-t) \geq 0$$

et comme $1 - t > 0$:

$$\boxed{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0}.$$

(2) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas.
De plus,
$$\frac{-\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-(-t)}{t} = 1$$
donc
$$\lim_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$$
et la fonction f est continue en 0 donc sur $]-\infty,1[$.

(3) On a pour tout $t\neq 0$,
$$f'(t) = \frac{\dfrac{t}{1-t}+\ln(1-t)}{t^2}$$
et d'après (1d), $\boxed{f'(t)\geq 0 \text{ pour tout } t\neq 0}$.

(4) La fonction f étant continue sur $]-\infty,1[$, dérivable sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ de dérivée ≥ 0, on en déduit que $\boxed{f \text{ est croissante sur }]-\infty,1[}$.

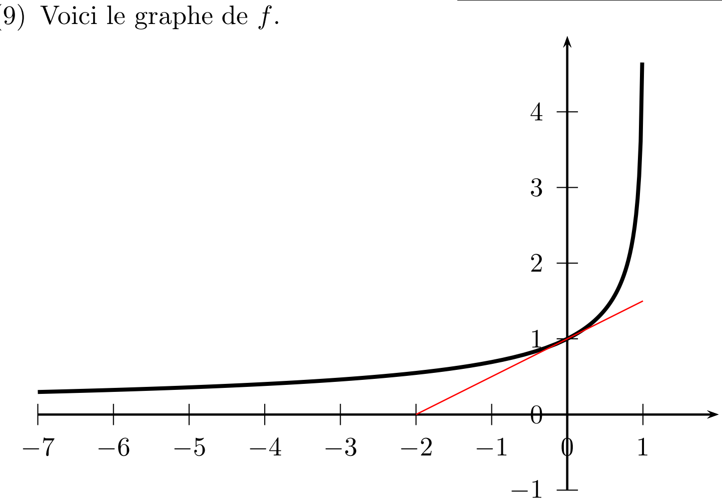
(5) Pour $t<0$, on a
$$f(t) = \frac{-\ln(1-t)}{t} = \frac{-\ln(-t(-1/t+1))}{t} = \frac{-\ln(-t)-\ln(1-1/t)}{t} \underset{t\to-\infty}{\sim} \boxed{-\frac{\ln(-t)}{t}}.$$
Par croissances comparées (à l'aide du changement de variables $u=-t$), on en déduit que $\boxed{\lim_{t\to-\infty} f(t)=0}$.

(6) Par quotient de limites, $\boxed{\lim_{t\to 1} f(t)=+\infty}$ et par croissances comparées (*via* un équivalent ou le changement de variables $u=1-t$), $\boxed{\lim_{t\to-\infty} f(t)=0}$.

(7) On a pour $t\neq 0$
$$f'(t) = \frac{t+(1-t)\ln(1-t)}{t^2(1-t)}.$$
Un développement limité du numérateur à l'ordre 2 en 0 donne
$$t+(1-t)\ln(1-t) = t+(1-t)(-t-t^2/2+o(t^2)) = t-t+t^2-t^2/2+o(t^2) = \frac{t^2}{2}+o(t^2).$$
On en déduit que
$$f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2}$$
et donc que $\boxed{\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{1}{2}}$.

(8) La fonction f est continue sur $]-\infty,1[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ et $\lim_{t\to 0} f'(t) = \dfrac{1}{2}$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

(9) Voici le graphe de f.



Partie IV. Une équation différentielle.

(1) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre.
L'équation homogène s'écrit
$$y' = -\frac{1}{t}y.$$
Les solutions sur $]0,1[$ sont de la forme
$$t \mapsto y_h(t) = Ce^{-\ln(t)} = \frac{C}{t}$$
où C est une constante.
On cherche une solution particulière par variation de la constante sous la forme $t \mapsto y_p(t) = \dfrac{C(t)}{t}$.
On obtient
$$\frac{C'(t)}{t} = \frac{1}{t(1-t)}$$
puis $C'(t) = \dfrac{1}{1-t}$. On en déduit
$$C(t) = -\ln(1-t)$$
et finalement
$$t \mapsto y_p(t) = \frac{-\ln(1-t)}{t} = f(t).$$
On en déduit finalement que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme
$$\boxed{t \mapsto y(t) = \frac{C}{t} + f(t)}$$
où C est une constante réelle (et f la fonction introduite au début de la Partie II).

(2) Un raisonnement analogue en prenant garde au ln pusique $t < 0$ conduit à la même forme de solutions sur $]-\infty,0[$:
$$\boxed{t \mapsto y(t) = \frac{K}{t} + f(t)}$$
où K est une constante réelle.

(3) On raisonne par analyse/synthèse.
Soit y une solution de (E) sur $]-\infty,1[$. D'après ce qui précède, il existe deux constantes C et K telles
$$\forall t < 0,\ y(t) = \frac{K}{t} + f(t) \text{ et } \forall t \in]0,1[\,,\ y(t) = \frac{C}{t} + f(t).$$
Comme y est continue en 0, ces quantités convergent vers une limite réelle $y(0)$ lorsque t tend vers 0. Comme f est continue en 0, ceci impose $C = K = 0$ et donc que
$$\forall t \in]-\infty,1[\,,\ y(t) = f(t).$$
Vient le temps de la synthèse. Mais comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ (Partie II) et est bien solution de (E) (calcul immédiat), on en déduit que $\boxed{f \text{ est l'unique solution de } (E) \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty,1[}$.

Partie IV. Etude d'une primitive de f.

(1) La fonction L est l'unique primitive de f s'annulant en 0 : elle est bien définie sur $]-\infty,1[$ d'après le théorème fondamental de l'analyse car f est continue.
De plus, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ d'après I(7), on en déduit que $\underline{L \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]-\infty,1[}$.

(2) L'étude de f a montré que $f \geq 0$ sur $]-\infty,1[$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\boxed{L(x) \geq 0 \text{ si } x \geq 0}$ et que $\boxed{L(x) \leq 0 \text{ si } x \leq 0}$ (sens des bornes !).

(3) *Etude de L en 1.*

(a) A l'aide du changement de variables $u = 1-t$, on a
$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_A^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_{1-A}^{1-x} \frac{\ln(u)}{1-u}\,(-\mathrm{d}u) \boxed{= -\int_{1-x}^{1-A} \frac{\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]0,1[$, on a en reconnaissant une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) = \ln(t) \sum_{k=0}^{n} t^k = \ln(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{\ln(t)}{1-t} - \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

et donc bien

$$\boxed{\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) + \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}}.$$

(c) Par croissances comparées, on a $\lim_{t_t o0} t^k \ln(t) = 0$. On en déduit que la fonction $h_k \ : t \mapsto t^k \ln(t)$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant $\boxed{h_k(0) = 0}$.

(d) Pour $\varepsilon > 0$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{1} t^k \ln(t) \, \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \\ &= \boxed{-\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} \ln(\varepsilon) - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}}. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que

$$\boxed{\int_0^1 t^k \ln(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{(k+1)^2}}.$$

(e) On a

$$\int_{\varepsilon}^{1} \ln(t) \, \mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_{\varepsilon}^{1} = -1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon$$

et par croissances comparées à nouveau

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln(t) \, \mathrm{d}t = -1 = \int_0^1 \ln(t) \, \mathrm{d}t}.$$

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part $\lim_{t \to 0} g_n(t) = 0$ et d'autre part

$$g_n(t) = -t^{n+1} \frac{\ln(t) - \ln(1)}{t-1} \underset{t \to 1}{\to} -1 \times \ln'(1) = -1.$$

On en déduit que $g_n \ : t \mapsto \dfrac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant $\boxed{g_n(0) = 0 \text{ et } g_n(1) = -1}$.

(g) La fonction g_0 est continue sur le segment $[0,1]$ d'après la question précédente. D'après le théorème des bornes atteintes, g_0 est bornée sur $[0,1]$. On en déduit que

$$\boxed{M = \sup_{t \in [0,1]} |g_0(t)| = \sup_{t \in [0,1]} \frac{t|\ln(t)|}{1-t}}$$

existe dans $\mathbb{R}$.
On a alors

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n g_0(t) \, \mathrm{d}t$$

et par positivité de l'intégrale

$$0 \leq \left| \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 t^n |g_0(t)| \, \mathrm{d}t \leq M \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \frac{M}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \mathrm{d}t = 0}.$$

(h) C'est LA question où il faut avec lucidité utiliser toutes les questions précédentes. En utilisant (3a) et (3b), on a pour tout n

$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{1-x}^{1-A} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n} \int_{1-x}^{1-A} t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1-x}^{1-A} \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

On commence par faire tendre A vers 0 et il vient

$$L(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{1-x}^{1} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n} \int_{1-x}^{1} t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1-x}^{1} \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Puis on fait tendre x vers 1. Comme le terme de droite a une limite, ceci montre que $L(x)$ a une limite quand x tend vers 1 et que

$$\lim_{x\to 1} L(x) = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

D'après (3d) et (3e) (pour le cas $k=0$), on en déduit que

$$\lim_{x\to 1} L(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = u_{n+1} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout n, on peut faire tendre n vers $+\infty$ et utiliser le résultat admis en fin de Partie I et (3g). On obtient alors

$$\boxed{\lim_{x\to 1} L(x) = \frac{\pi^2}{6} + 0 = \frac{\pi^2}{6}}.$$

(4) (a) La fonction

$$x \mapsto \varphi(x) = L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$$

est dérivable sur $]-1,1[$ par somme et composée de fonctions dérivables (remarquer que $x^2 \in [0,1[$) et comme L est une primitive de f, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\boxed{\varphi'(x) = f(x) - f(-x) - xf(x^2) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{-x} + \frac{\ln(1-x^2)}{x} = -\frac{\ln\big((1-x)(1+x)\big)}{x} + \frac{\ln(1-x^2)}{x} = 0}.$$

(b) On en déduit que φ est constante sur $]-1,1[$ et comme $\varphi(0)=0$, on en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \boxed{L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)}.$$

(c) En passant à la limite lorsque x tend vers 1 et par continuité de L en -1, on en déduit que

$$\frac{\pi^2}{6} + L(-1) = \frac{\pi^2}{12}$$

et donc $\boxed{L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}}$.