# Lycée Champollion, PCSI-1-2-3, 2021-2022.
# Samedi 7 mai 2022
**Durée : 4 heures.**

**Instructions générales :**
Aucun document n'est autorisé.
L'emploi d'une calculatrice est interdit.
Dans chaque question, les résultats demandés seront $\boxed{\textbf{encadrés}}$, les étapes des méthodes mises en oeuvre et les résultats intermédiaires seront mis en évidence par un **surlignement**, une ligne sautée ou tout autre moyen de votre choix.
Vous êtes enfin invités à porter une attention particulière à la rédaction et à l'orthographe : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

**Barème indicatif sur 64 points (donnant une idée du temps respectif qu'il est bon de consacrer à chaque exercice)**.
Exercice : 10 points ;
Problème 1 : 19 points ;
Problème 2 : 35 points.

---

Ce DS sera IMPERATIVEMENT rendu sur 3 copies séparées :
- l'Exercice et la Partie III du Problème 2 seront rendus sur la COPIE 1,
- le Problème 1 sera rendu sur la COPIE 2,
- les Parties I et II du Problème 2 seront rendues sur la COPIE 3.

---

## Exercice (COPIE 1)

Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note

$$F = \{f \in E \mid f'' + f = 0\},\ G = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\} \text{ et } H = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

(1) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, en déterminer une base et la dimension.
(2) Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Pour la suite, on admet que $H$ est aussi un sous-espace vectoriel de $E$.

(3) Montrer que $E = F \oplus G$.
(4) Déterminer $F \cap H$.
(5) Montrer que $F + H = \{f \in E \mid f(0) = -f(\pi)\}$.

---

## Problème 1 (d'après E3A 2012, option PC) (COPIE 2)

*Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre que vous préférez.*

### Partie I. Sur certains endomorphismes de rang 1.

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \geq 2$.
Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On suppose **dans toute la suite du problème** que $\varphi$ n'est pas la forme nulle.

(1) *Question de cours.* Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = n - 1$.

Soit $\boxed{a \neq 0 \text{ un vecteur non nul de } E}$ fixé dans tout le problème. Soit $f : E \to E$ l'application définie par

$$\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x)a.$$

(2) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
(3) Déterminer (dans l'ordre qui vous semblera le plus pertinent) : $\operatorname{Ker}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$.

(4) Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$,
$$\forall x \in E, f^k(x) = \varphi(x)\big(\varphi(a)\big)^{k-1} a.$$
*Attention ici :* $f^k$ désigne le $k$-ième itéré de l'endomorphisme $f$, alors que $\big(\varphi(a)\big)^{k-1}$ est la puissance $(k-1)$-ième du réel $\varphi(a)$ !

(5) Démontrer les équivalences suivantes :
$$f^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = 0$$
et
$$f^2 \neq 0 \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

(6) On suppose que $\varphi(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est la matrice diagonale suivante
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varphi(a) \end{pmatrix}.$$

(7) On suppose que $\varphi(a) = 0$ et on considère un vecteur $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $e$ de $E$ de la forme $e = (e_1, \ldots, e_{n-2}, f(b), b)$ dans laquelle la matrice de $f$ est la matrice triangulaire
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Partie II. Un exemple.**

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $f\ : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = \left(\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right)(X^2 + X + \lambda).$$

(1) Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa matrice $A$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
(2) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.
(3) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
(4) Pour quel(s) $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ ?
(5) Pour quel $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $f \circ f = 0$ ?

---

## Problème 2 (inspiré de Agro-Veto 2021)

Les trois parties de ce problème sont essentiellement indépendantes. Seules les questions (7) et (8) de la partie III utilisent les résultats des parties I et II.

**Partie I. Etude d'une matrice de taille 3 et de ses puissances.** **(COPIE 3)**

Dans toute cette partie, on note
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \frac{1}{2}A - I_3.$$

(1) Montrer que $B$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.

(2) Vérifier que $(A-2I_3)(A-4I_3)=0$ : on dit que le polynôme $(X-2)(X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$.
(3) Pour $n\geq 1$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n$ par $(X-4)(X-2)$.
(4) En déduire, pour $n\geq 1$, l'expression de $A^n$ comme combinaison linéaire de $A$ et de $I_3$.
(5) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}A\right)^n = B.$$

**Partie II. Etude d'une matrice de taille 4 et de ses puissances.** (COPIE 3)

Dans toute cette partie, on note
$$M=\begin{pmatrix}27 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 12 & 6 & 0\\ 0 & 6 & 12 & 0\\ 0 & 1 & 8 & 27\end{pmatrix} \quad \text{et } f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4\\ X & \mapsto & MX\end{array}$$
l'application linéaire canoniquement associée.

(1) Montrer que les vecteurs
$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ et } v_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}$$
forment une base de $\mathbb{R}^4$.
(2) Déterminer la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3,v_4)$.
(3) Ecrire la formule de changement de bases de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ pour l'endomorphisme $f$. *On explicitera toutes les matrices intervenant dans cette formule.*
(4) Déterminer la limite
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{27}D\right)^n.$$
(5) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{27}M\right)^n = \begin{pmatrix}1 & 2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1\end{pmatrix}$$

**Partie III. Une application probabiliste : le modèle d'évolution de Wright-Fisher.** (COPIE 1)

On dispose d'un stock infini de boules vertes et de boules blanches. Dans toute cette expérience, $N$ est un entier fixé $\geq 2$.
On dispose d'une urne initiale $U_0$ contenant $N$ boules, dont $a\geq 1$ sont vertes et $b\geq 1$ sont blanches, avec $a+b=N$. Puis

- on effectue $N$ tirages avec remise d'une boule dans $U_0$. On note $X_1$ le nombre de boules vertes obtenues lors de ces $N$ tirages.
- on remplit une urne $U_1$ avec $X_1$ boules vertes et $N-X_1$ boules blanches prises dans le stock de boules.
- on recommence avec $U_1$ : on effectue $N$ tirages avec remise d'une boule dans $U_1$. On note $X_2$ le nombre de boules vertes obtenues lors de ces $N$ tirages puis on remplit une urne $U_2$ avec $X_2$ boules vertes et $N-X_2$ boules blanches.
- on recommence indéfiniment : on construit ainsi une suite d'urnes $U_1,\dots,U_n,\dots$ contenant toutes $N$ boules et on note $X_n$ le nombres de boules vertes mises dans $U_n$. Cette variable aléatoire $X_n$ désigne donc aussi le nombres de boules vertes obtenues lors des $N$ tirages avec remise dans l'urne $U_{n-1}$.

(1) Déterminer la loi de $X_1$. Rappeler son espérance et sa variance.
(2) Pour $n\geq 1$, déterminer $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=k)$ en distinguant les cas $k=0$ et $k\geq 1$.

(3) Pour $n \geq 1$, déterminer $\mathbb{P}_{(X_n=N)}(X_{n+1}=k)$ en distinguant les cas $k=N$ et $k \leq N-1$.

(4) (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $i, j \in [\![0, N]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j} \mathbb{P}(X_n=i).$$

(b) Rappeler l'interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{N} j \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}$$

et rappeler sa valeur.

(c) En déduire soigneusement que

$$\forall n \geq 1,\, \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1).$$

(5) *Le cas $N=2$.* Dans cette question, on suppose que $N=2$ et que $a=b=1$. Pour $n \geq 1$, on note $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \end{pmatrix}$. On a donc en particulier $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer, en utilisant (4), que pour tout $n \geq 0$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{4} A V_n$ où $A$ est la matrice introduite à la partie I.

(b) En déduire la valeur de $V_n$ en fonction de $A$, $V_0$ et $n$.

(c) A l'aide de I(5), en déduire la limite de $V_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Commenter le résultat obtenu.

(6) *Le cas $N=3$.* Dans cette question, on suppose que $N=3$, que $a=1$ et que $b=2$.
Pour $n \geq 1$, on note $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \\ \mathbb{P}(X_n=3) \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout $n \geq 0$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{27} M V_n$ où $M$ est la matrice introduite à la partie II.
A l'aide de II(5), déterminer la limite de $V_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Commenter à nouveau le résultat obtenu.

(7) *Le cas général.* On suppose à nouveau que $N$ est un entier quelconque $\geq 2$. On note, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \mathbb{P}\big(X_n \in \{0, N\}\big) = \mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}(X_n=N).$$

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ :

$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}\big(X_{n+1} \in \{0, N\}\big) \geq \frac{2}{N^N}.$$

(b) En déduire que

$$\forall n \geq 1,\, u_{n+1} \geq \left(1 - \frac{2}{N^N}\right) u_n + \frac{2}{N^N}.$$

Soit $(w_n)$ la suite définie par $w_1 = u_1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$w_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{N^N}\right) w_n + \frac{2}{N^N}.$$

(c) Montrer que la suite $(w_n)$ converge et déterminer sa limite.

(d) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $u_n \geq w_n$.

(e) En déduire la limite de $(u_n)$. Commenter le résultat obtenu.

(f) En utilisant (4c), en déduire que les suites $\big(\mathbb{P}(X_n=0)\big)_{n\geq 1}$ et $\big(\mathbb{P}(X_n=N)\big)_{n\geq 1}$ convergent et déterminer leur limite respective.

*Commentaire : le modèle d'évolution de Wright-Fisher est utilisé pour modéliser la génétique des populations.*

# CORRIGÉ

**Avertissements** : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé. Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne vous sembleront pas claires...n'hésitez pas à me questionner pour plus de précisions !*

---

## Exercice

(1) D'après le cours sur les EDL2, $\boxed{F = \text{Vect}(\cos, \sin)}$ et $\boxed{\dim(F) = 2}$.

(2) Les ensembles $G$ et $H$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ comme noyaux respectifs des applications linéaires $T\ : E \to \mathbb{R}^2$ et $S\ : E \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall f \in E,\, T(f) = \big(f(0), f'(0)\big) \text{ et } S(f) = \big(f(0), f(\pi)\big).$$

(3) Un raisonnement classique par analyse/synthèse montre que tout $h \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{f(x) = h(0)\cos(x) + h'(0)\sin(x) \text{ et } g(x) = h(x) - h(0)\cos(x) - h'(0)\sin(x)}.$$

Ceci montre que $\boxed{E = F \oplus G}$.

(4) On a de suite $\boxed{F \cap H = \text{Vect}(\sin)}$.

(5) On montre que $F + H = \{f \in E \mid f(0) = -f(\pi)\}$ par double-inclusion :
- si $f \in F + H$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $h \in H$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + h(x).$$

On a alors $f(0) = a$ et $f(\pi) = -a$. On a donc bien $f(0) = -f(\pi)$.
- réciproquement, si $f(0) = -f(\pi)$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\cos(x) + \big(f(x) - f(0)\cos(x)\big).$$

La fonction $x \mapsto f(0)\cos(x)$ appartient bien à $F$ et la fonction $x \mapsto h(x) = f(x) - f(0)\cos(x)$ appartient à $H$ car $h(0) = 0$ et $f(\pi) = f(0) + f(\pi) = 0$.

---

## Problème 1 (d'après E3A 2012, option PC)

**Partie I. Sur certains endomorphismes de rang 1.**

(1) Voir le cours.

(2) Immédiat en revenant à la définition.

(3) On a

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x)a = 0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(\varphi)$$

donc $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(\varphi)}$. D'après le théorème du rang appliqué à $f$, on en déduit que

$$\dim \text{Im}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f) = \dim E - \dim \text{Ker}(\varphi) = 1.$$

Ainsi $\boxed{\text{rg}(f) = 1}$. Puis, pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x)a \in \text{Vect}(a)$ donc $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(a)$ et comme $\dim \text{Im}(f) = \dim \text{Vect}(a) = 1$, il vient $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(a)}$.

(4) Par récurrence sur $k$, l'initialisation étant claire pour $k = 1$. Puis, pour l'hérédité, on a par linéarité de $f^k$,

$$f^{k+1}(x) = f^k\big(f(x)\big) = f^k\big(\varphi(x)a\big) = \varphi(x)f^k(a).$$

Puis par hypothèse de récurrence,

$$f^k(a) = \varphi(a)\big(\varphi(a)\big)^{k-1}a = \big(\varphi(a)\big)^k a$$

et finalement

$$f^{k+1}(x) = \varphi(x)\big(\varphi(a)\big)^k a$$

ce qui termine l'hérédité !

(5) On a pour tout $x \in E$, $f^2(x) = \varphi(x)\varphi(a)a$. Comme $\varphi$ n'est pas l'application nulle, on en déduit que $f^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = 0$.
Rédaction alternative :

$$f^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(a) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(a) = 0.$$

Par ailleurs, on a $\dim \mathrm{Ker}(f) = n-1$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$ donc

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}.$$

Mais comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a)$, on a

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow a \notin \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow a \notin \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(a) \neq 0 \Leftrightarrow f^2 \neq 0}.$$

(6) Comme $\varphi(a) \neq 0$, on a $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a)$, la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ est une base de $E$ (adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$) et comme $f(a) = \varphi(a)a$, la matrice de $f$ dans la base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, a)$ est bien la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varphi(a) \end{pmatrix}.$$

(7) Soit $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$. On a $f(b) = \varphi(b)a \neq 0$. Comme $\varphi(a) = 0$, on a $f(a) = 0$ donc $a \in \mathrm{Ker}(f)$ et $f(b) \in \mathrm{Ker}(f)$. Complétons $f(b)$ en une base $(e_1, \ldots, e_{n-2}, f(b))$ de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan et $b \notin \mathrm{Ker}(f)$, la famille $(e_1, \ldots, e_{n-2}, f(b), b)$ est une base de $E$ et la matrice de $f$ dans cette base est bien la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Partie II. Un exemple.**

(1) Le fait que $f$ soit linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ est immédiat. La matrice $A$ de $f$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda/2 & \lambda/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6\lambda & 3\lambda & 2\lambda \\ 6 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Les colonnes de $A$ étant toutes proportionnelles, on en déduit que $A$ est de rang 1 et

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 et les relations entre les colonnes fournissent des éléments du noyau. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)}.$$

(3) On en déduit que $\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) = 1}$ et qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\boxed{(X^2 + X + \lambda)}$.
De même, $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) = 1}$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\boxed{(1 - 2X, 1 - 3X^2)}$.

(4) En utilisant la partie I, on a $\varphi\ : P \mapsto \varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ et $a = X^2 + X + \lambda$. On déduit de I(5) que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\varphi(X^2+X+\lambda) \neq 0$. Comme $\varphi(X^2+X+\lambda) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+\lambda$. On a donc

$$\boxed{\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{5}{6}}.$$

Un raisonnement indépendant de la Partie I est possible : $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $(X^2+X+\lambda, 1-2X, 1-3X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Or,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 5 + 6\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{5}{6},$$

ce qui redonne bien le résultat précédent.

(5) En appliquant à nouveau I(5) ou à l'aide à nouveau d'un calcul direct, on a de même

$$\boxed{f \circ f = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{6}}.$$

---

# Problème 2 (inspiré de Agro-Veto 2021)

**Partie I. Etude d'une matrice de taille 3 et de ses puissances.**

(1) On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que $\boxed{B^2 = B}$. On en déduit que $B$ est la matrice du projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Ker}(B - I_3)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(B)$. La détermination de ces noyaux ne pose aucun problème :on trouve

$$\boxed{\mathrm{Ker}(B - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)}.$$

(2) L'équation $B^2 = B$ est équivalente à $\dfrac{A^2}{4} - A + I_3 = \dfrac{A}{2} - I_3$ , ou encore $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$. Comme $(A - 2I_3)(A - 4I_3) = A^2 - 6A + 8I_3$, on a bien $\boxed{(A - 2I_3)(A - 4I_3) = 0}$.

(3) Le théorème de la division euclidienne affirme que pour tout $n \geq 1$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que

$$X^n = (X-4)(X-2)Q + a_n X + b_n.$$

En évaluant en 4 puis en 2, il vient

$$4a_n + b = 4^n \text{ et } 2a_n + b = 2^n.$$

On en déduit que $a_n = \dfrac{1}{2}(4^n - 2^n)$ et $b = 2^{n+1} - 4^n$. On a donc

$$\boxed{X^n = (X-4)(X-2)Q + \frac{1}{2}(4^n - 2^n)X + 2^{n+1} - 4^n}.$$

(4) En substituant $A$ à $X$, il vient en utilisant (2) :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)A + \left(2^{n+1} - 4^n\right)I_3}.$$

(5) On en déduit que

$$\left(\frac{1}{4}A\right)^n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)A + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)I_3.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}A\right)^n = \frac{1}{2}A - I_3 = B}.$$

**Partie II. Etude d'une matrice de taille 4 et de ses puissances.**

(1) On a

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

donc $\underline{(v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

(2) Des calculs faciles montrent que

$$f(v_1) = Mv_1 = 27v_1,\ f(v_2) = 27v_2,\ f(v_3) = 18v_3 \text{ et } f(v_4) = 6v_4.$$

On en déduit que la matrice $D$ de $f$ dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est

$$D = \begin{pmatrix}27 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

(3) La formule de changement de bases donne

$$M = PDP^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(4) On a de suite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{27}D\right)^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(5) Une récurrence aussi immédiate que classique donne $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 1$. De là

$$\left(\frac{1}{27}M\right)^n = P\left(\frac{1}{27}D\right)^n P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\to} P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1\end{pmatrix}.$$

**Partie III. Une application probabiliste : le modèle d'évolution de Wright-Fisher.**

(1) S'agissant de tirages avec remise, on répète $N$ fois une expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(a/N)$ dans les mêmes conditions. Les tirages sont donc indépendants et $X_1$ représente le nombre de succès (tirer une boule verte). On en déduit que $\boxed{X_1 \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(N, a/N)}$. D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(X_1) = N \times a/N = a}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X_1) = N(a/N)(b/N) = \frac{ab}{N}}$.

(2) Sachant $(X_n = 0)$, il n'y a que des boules blanches dans l'urne $U_n$. On en déduit de suite que

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = k) = 0 \text{ si } k \geq 1 \text{ et que } \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1}.$$

(3) Sachant $(X_n = N)$, il n'y a que des boules vertes dans l'urne $U_n$. On en déduit de même que

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_n=N)}(X_{n+1} = k) = 0 \text{ si } k \leq N-1 \text{ et que } \mathbb{P}_{(X_n=N)}(X_{n+1} = N) = 1}.$$

(4) (a) Sachant $(X_n = i)$, il y a $i$ boules vertes et $N - i$ boules blanches dans l'urne $U_n$. La loi conditionnelle de $X_{n+1}$ sachant $(X_n = i)$ est donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$. On a donc pour tout $n \geq 1$, pour tout $i, j \in [\![0, N]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}}.$$

La formule des probabilités totales appliquée avec le s.c.e $\big((X_n=0),\dots,(X_n=N)\big)$ à l'événement $(X_{n+1}=j)$ donne alors

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=j)=\sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)\mathbb{P}(X_n=i)=\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}\mathbb{P}(X_n=i)}.$$

(b) La quantité

$$S_i=\sum_{j=0}^{N} j\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}$$

représente l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(N,i/N)$. On en déduit que $\boxed{S_i=i}$.

(c) On déduit de ce qui précède en inversant l'ordre des sommes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{N} j\mathbb{P}(X_{n+1}=j)\\
&= \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} j\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}\mathbb{P}(X_n=i)\\
&= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} j\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}\mathbb{P}(X_n=i)\\
&= \sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=i)\sum_{j=0}^{N} j\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}\\
&= \sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=i)S_i\\
&= \sum_{i=0}^{N} i\mathbb{P}(X_n=i)\\
&= \mathbb{E}(X_n).
\end{aligned}$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 1}$ est donc constante et on a bien

$$\boxed{\forall n\geq 1,\ \mathbb{E}(X_n)=\mathbb{E}(X_1)=a}.$$

(5) (a) En appliquant (4a), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)\mathbb{P}(X_n=2)\\
&= \mathbb{P}(X_n=0)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1)+0.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=2)\\
&= 0+2\times\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1)+0.
\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)\mathbb{P}(X_n=2)\\
&= 0+\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_n=2).
\end{aligned}$$

On a donc

$$V_{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 1\end{pmatrix}V_n=\frac{1}{4}AV_n.$$

(b) Par récurrence immédiate, on en déduit que

$$\boxed{\forall n\geq 1,\ V_n=\frac{1}{4^n}A^nV_0}.$$

(c) On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}V_n=BV_0=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}}.$$

Si lors d'un tirage, on ne tire que des boules vertes ou que des boules blanches, tous les tirages successifs seront monocolores. Ceci va finir par se passer et comme l'urne initiale contient 1 boule blanche et une 1 boule verte, il y a autant de chances que ceci se passe avec des boules blanches qu'avec des boules vertes.

(6) On a ici $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et à l'aide de II(5) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} V_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}}.$$

Si lors d'un tirage, on ne tire que des boules vertes ou que des boules blanches, tous les tirages successifs seront monocolores. Ceci va à nouveau finir par se passer et comme l'urne initiale contient 2 boules blanches et une 1 boule verte, il y a deux fois plus de chances que ceci se passe avec des boules blanches qu'avec des boules vertes. Il est donc naturel d'avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 2/3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = 1/3$.

(7) (a) On a pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X_n=k)}\big(X_{n+1} \in \{0, N\}\big) &= \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = N) \\ &= \left(\frac{N-k}{N}\right)^N + \left(\frac{k}{N}\right)^N \\ &\geq \left(\frac{1}{N}\right)^N + \left(\frac{1}{N}\right)^N \\ &= \frac{2}{N^N}. \end{aligned}$$

(b) A nouveau à l'aide de la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \mathbb{P}\big(X_{n+1} \in \{0, N\}\big) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}_{(X_n=k)}\big(X_{n+1} \in \{0, N\}\big)\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= 1 \times \mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{P}_{(X_n=k)}\big(X_{n+1} \in \{0, N\}\big)\mathbb{P}(X_n = k) + 1 \times \mathbb{P}(X_n = N) \\ &\geq u_n + \frac{2}{N^N} \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= u_n + \frac{2}{N^N}\left(1 - \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_n = N)\right) \\ &= u_n + \frac{2}{N^N}(1 - u_n) \\ &= \left(1 - \frac{2}{N^N}\right) u_n + \frac{2}{N^N}. \end{aligned}$$

(c) La suite $(w_n)$ converge est une suite arithmético-géométrique de raison $1 - \dfrac{2}{N^N} \in [0, 1[$. Cette suite converge donc vers l'unique réel $\alpha$ solution de

$$\alpha = \left(1 - \frac{2}{N^N}\right)\alpha + \frac{2}{N^N}.$$

Cette équation a pour solution $\alpha = 1$. On a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 1.}$$

(d) Immédiat par récurrence. A rédiger sur la copie bien sûr !

(e) On a donc pour tout $n \geq 1$,

$$1 \geq u_n = \mathbb{P}\big(X_n \in \{0, N\}\big) \geq w_n.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(X_n \in \{0, N\}\big) = 1}.$$

Si lors d'un tirage, on ne tire que des boules vertes ou que des boules blanches, tous les tirages successifs seront monocolores. Ceci va à nouveau finir par se passer !

(f) D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!], \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0.$$

Comme pour tout $n$,

$$a = \mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(X_n = k),$$

on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} N\mathbb{P}(X_n = N) = a.$$

On en déduit finalement que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = N) = \frac{a}{N} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{b}{N}}.$$

---