

I. ACCUMULATEUR Li/ion (Centrale PSI 2015 - extrait)

Constante d'Avogadro

$$N_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Masse molaire du lithium

$$M(\text{Li}) = 6,94 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse molaire du carbone

$$M(\text{C}) = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} ; \quad \mu(\text{Ni}) = 8900 \text{ kg/m}^3$$

Charge électrique d'un électron

$$q_e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C} ; \quad \mu(\text{Pb}) = 11350 \text{ kg/m}^3$$

On rappelle que le lithium appartient à la première ligne et à la première colonne de la classification périodique ; sa configuration électronique est $1s^2 2s^1$.

II.A.4) Comment l'électronégativité des éléments évolue-t-elle si l'on se déplace dans la classification périodique de la gauche vers la droite ? Que peut-on en déduire concernant l'électronégativité du lithium ?

II.A.5) Justifier le caractère réducteur du lithium. Quel ion le lithium peut-il former ?

II.A.6) À température ambiante, le lithium possède une structure cubique centrée. Sa maille élémentaire est cubique, les atomes occupant les sommets du cube et le centre du cube. On caractérise cet arrangement par le côté du cube élémentaire, nommé paramètre de maille, noté a . Déterminer le nombre d'atomes par maille et la compacité de cette structure.

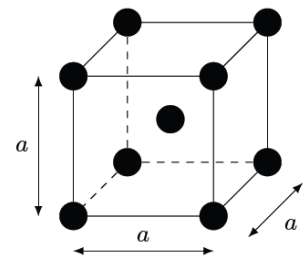


Figure 3

II.A.7) Le paramètre de maille vaut $a = 0,35 \text{ nm}$. Déterminer la masse volumique du lithium.

II.A.8) D'après les résultats précédents, citer deux qualités importantes d'un accumulateur au lithium.

II.B - Accumulateur Li-ion

Un accumulateur lithium-ion fonctionne par l'échange réversible d'ions lithium entre une électrode négative et une électrode positive.

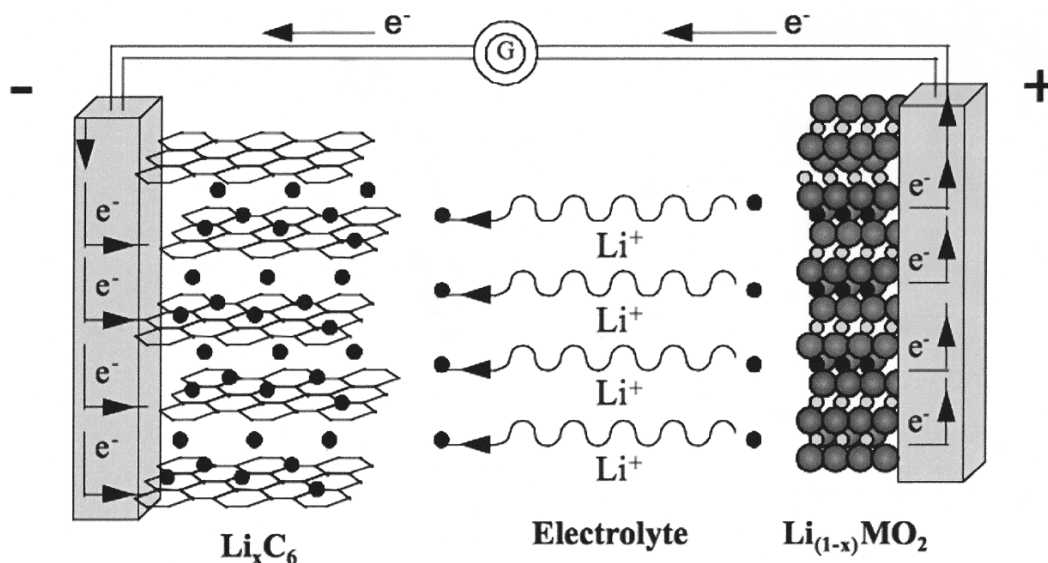


Figure 4 Schéma de fonctionnement du générateur lithium-ion représenté lors de sa charge⁴

II.B.1) L'électrode négative

L'utilisation d'une électrode en lithium pour constituer l'électrode négative d'un accumulateur pose de nombreux problèmes, c'est la raison pour laquelle on a choisi d'utiliser le lithium en insertion dans une structure hôte. Les atomes de lithium sont insérés dans une structure carbonée, par exemple du graphite, on parle d'électrode au graphite lithié. Lors de la charge, la réaction électrochimique qui se produit est la réduction des ions lithium qui s'accompagne de l'insertion des atomes de lithium dans le graphite. Lors de la décharge, les atomes de lithium sont oxydés et les ions lithium se désinsèrent.

a) La formule chimique du composé d'insertion est Li_xC_6 , x variant de zéro dans l'état déchargé à un dans l'état chargé.

- i. Rappeler la demi-équation de réduction des ions Li^+ .
- ii. Écrire la réaction d'insertion des atomes de lithium dans le graphite.
- iii. Les deux réactions se produisent simultanément, écrire la demi-équation bilan traduisant ces phénomènes pendant la charge.

- b) On souhaite déterminer la quantité maximale d'électricité que peut stocker cette électrode.
- Déterminer le nombre maximum N_{\max} d'atomes de lithium qui peuvent être insérés dans 1 g de graphite.
 - Lors de la décharge, chaque atome de lithium peut libérer un électron. Déterminer la charge électrique maximale q_{\max} que peut délivrer l'électrode de graphite lithié par gramme de graphite, en $C \cdot g^{-1}$ puis en $mA \cdot h \cdot g^{-1}$.

II.B.2) L'électrode positive

L'électrode positive est constituée d'un cristal d'oxyde de cobalt (CoO_2) dans lequel des ions lithium s'insèrent pour former un cristal d'oxyde de cobalt lithié ($LiCoO_2$). Lors de la charge, le cobalt s'oxyde pendant que les ions lithium se désinsèrent. Pendant la décharge, le cobalt est réduit pendant que les ions lithium s'insèrent.

a) En considérant que le nombre d'oxydation de l'oxygène dans CoO_2 et dans $LiCoO_2$ vaut $-II$ et que celui du lithium dans $LiCoO_2$ est $+I$, déterminer le nombre d'oxydation du cobalt dans CoO_2 et dans $LiCoO_2$. Identifier l'oxydant et le réducteur dans le couple $CoO_2 / LiCoO_2$.

b) Écrire la demi-équation qui se produit à cette électrode lors de la charge en tenant compte de l'insertion des ions lithium.

II.B.3) Écrire l'équation bilan du fonctionnement de l'accumulateur lors de la charge et lors de la décharge.

II.B.4) Le document de présentation de l'Hyperloop indique que la batterie lithium-ion utilisée devra fournir une puissance de 328 kW au compresseur pendant une durée de 45 minutes. La masse totale de cette batterie est de 1500 kg.

a) Déterminer l'énergie nécessaire au fonctionnement du compresseur pendant le trajet (en joule) puis convertir cette énergie en watt heure.

b) Déterminer la puissance massique que doit pouvoir fournir la batterie prévue, c'est-à-dire la puissance fournie par kg de batterie.

c) Déterminer l'énergie massique que doit pouvoir emmagasiner la batterie.

d) La figure 5 présente les puissances et énergies massiques accessibles en fonction des différentes technologies d'accumulateurs.

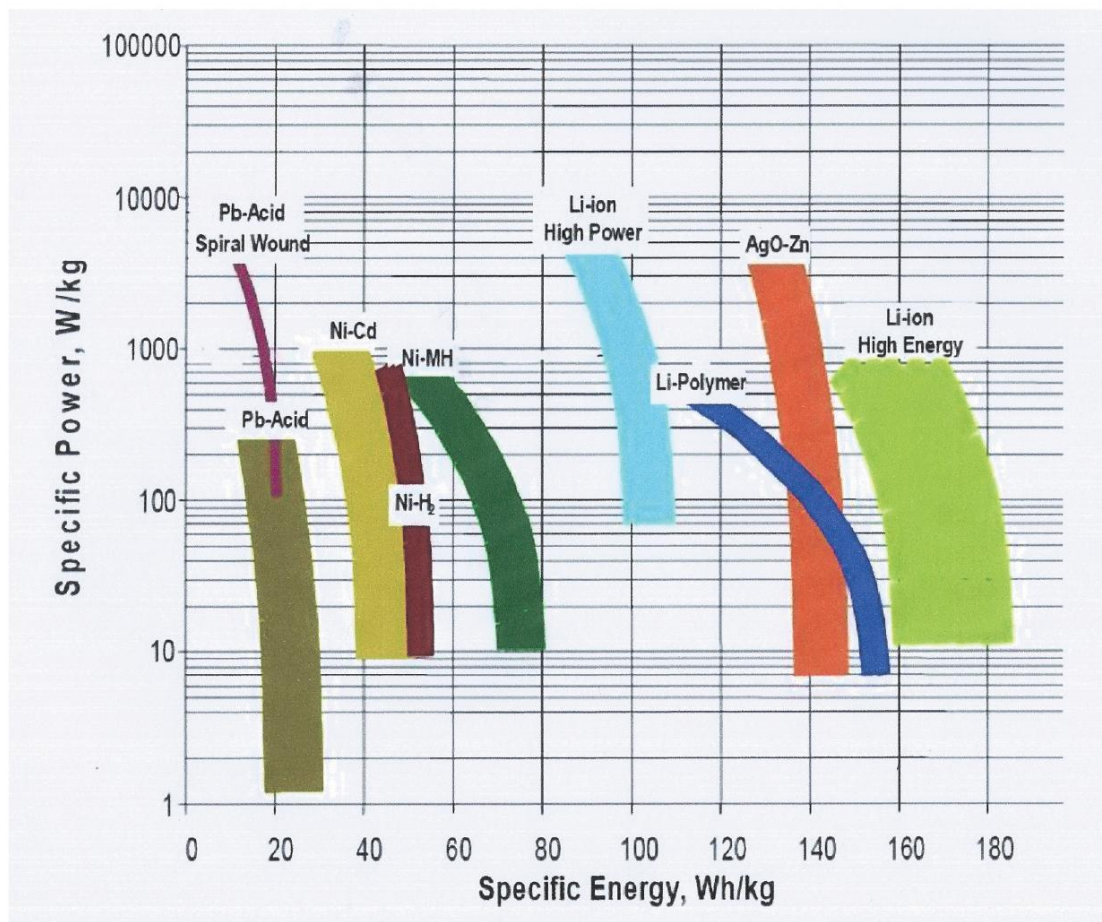


Figure 5 Puissance massique en fonction de l'énergie massique pour différentes technologies d'accumulateurs⁵

Existe-t-il une technologie d'accumulateur compatible avec les indications données par le document de présentation. Si oui, laquelle ?

II. CORROSION ET PROTECTION DES ARMATURES EN FER DU BETON ARMÉ (Extrait CCP PSI 2006)

Toutes les données nécessaires à la résolution de ce problème apparaissent en fin d'énoncé (paragraphe III).

I. Le béton

Le béton est constitué d'un mélange de ciment, de sable et de granulats (pierres et graviers). Dans la suite, on considérera le sable et les granulats comme inertes et on admettra, sans risque d'erreurs majeures, que la chimie du béton est gouvernée par celle du ciment.

Les ciments contiennent divers constituants, dont des silicates de calcium. Ceux-ci peuvent être obtenus par réaction entre deux solides, le dioxyde de silicium SiO_2 (la silice) et le monoxyde de calcium CaO (la chaux).

Q1: Quel est le nombre d'oxydation du silicium dans la silice ? Expliquer comment ce nombre d'oxydation est en bon accord avec la structure électronique de l'atome de silicium dans son état fondamental.

Q2 : Mêmes questions pour le calcium dans la chaux.

Q3 : Quels sont les numéros atomiques des deux éléments situés au-dessus et au-dessous du silicium dans la même colonne de la classification périodique des éléments ? On justifiera la réponse.

La silice

La silice est un composé naturel que l'on rencontre sous de nombreuses formes polymorphiques cristallisées, dont le quartz et la cristobalite, ainsi que sous forme amorphe.

Q4 : Qu'est-ce qui différencie deux variétés polymorphiques (ou deux variétés allotropiques pour les corps purs élémentaires) ? Qu'entend-on par forme amorphe ?

La silice est légèrement soluble dans l'eau sous forme moléculaire, forme qu'on notera, pour simplifier, $(\text{SiO}_2)_{\text{aq}}$. En fait, il s'agit plus vraisemblablement de l'acide tétraoxosilicique (IV) H_4SiO_4 .

Q5 : Quelle est la formule de Lewis de cet acide ?

Le silicate de calcium

On considère le silicate de calcium CaSiO_3 , composé ionique qu'on considèrera comporter, à l'état solide, l'ion calcium (II) Ca^{2+} et l'ion SiO_3^{2-} .

Q6 : Quelle est la formule de Lewis de l'anion SiO_3^{2-} ? Quelle est sa forme géométrique selon la théorie VSEPR ?

II. Les armatures en fer et leur corrosion

La résistance mécanique du béton armé est due à la présence des armatures en fer qui y sont insérées avant la prise.

Q7 : Observer le diagramme potentiel-pH du système fer-eau proposé en Figure 1, tracé en prenant en compte trois solides $(\text{Fe})_s$, $(\text{FeOOH})_s$, $(\text{Fe}(\text{OH})_2)_s$ et trois espèces ioniques dissoutes $(\text{Fe}^{2+})_{\text{aq}}$, $(\text{Fe}^{3+})_{\text{aq}}$, $(\text{HFeO}_2^-)_{\text{aq}}$. Redonner à chacun des domaines 1 à 6 la formule de l'espèce qui y existe ou y prédomine.

Q8 : Quel composé solide se forme sur du fer à $\text{pH} = 12$ au contact d'une eau saturée en dioxygène dissous ?

Ce composé rend le fer passif à $\text{pH} = 12$. Les armatures du béton armé sont donc protégées contre la corrosion. Cependant on observe que la corrosion se développe après un certain temps de vie quand le pH de l'eau d'infiltration a baissé jusqu'à 9 environ. Le composé qui se forme sur la surface du fer est alors différent : il s'agit de trihydroxyde de fer $(\text{Fe}(\text{OH})_3)_s$ non pris en compte dans le tracé de la Figure 2.

Q9 : Montrer en écrivant une transformation chimique simple qu'on peut considérer ce dernier comme une forme hydratée du précédent.

Q10 : Ce composé, contrairement au précédent, ne rend pas le fer passif. Citer deux adjectifs caractérisant un produit de corrosion solide apportant une passivité de qualité.

Q11 : Certains envisagent de soumettre, dans le futur, les armatures métalliques des constructions en béton armé à une protection cathodique avec une surtension de 100 mV. Déduire du diagramme de la Figure 1 à quel potentiel elles devront être portées dans une eau d'infiltration à pH = 12 contenant $1 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ de fer dissous. On donnera la réponse par rapport à l'électrode standard à hydrogène et par rapport à l'électrode au calomel saturée.

Q12 : Une autre solution envisagée serait de porter les armatures à une forte polarisation électrique épisodique qui aurait pour but de faire augmenter le pH local par électrolyse pour le ramener à la valeur de 12 où le produit de corrosion est passivant. Cette polarisation devrait-elle être anodique ou cathodique ? Écrire la demi-réaction électrochimique mise en jeu conduisant à cette alcalinisation.

III. DONNÉES :

Numéros atomiques : O : 8 ; Si : 14 ; Ca : 20

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Constante de Nernst à 298 K : $\ln 10 \times RT/F \approx 0,06 \text{ V}$

Potentiels redox standard à 298 K :

$(\text{O}_2)_g / \text{H}_2\text{O}$	$e^\circ = + 1,23 \text{ V/ESH}$
$(\text{Fe}^{2+})_{\text{aq}} / (\text{Fe})_s$	$e^\circ = - 0,44 \text{ V/ESH}$
$(\text{Fe}^{3+})_{\text{aq}} / (\text{Fe}^{2+})_{\text{aq}}$	$e^\circ = + 0,77 \text{ V/ESH}$

Potentiel de l'électrode au calomel saturée à 298 K : $e^\circ = + 0,25 \text{ V/ESH}$

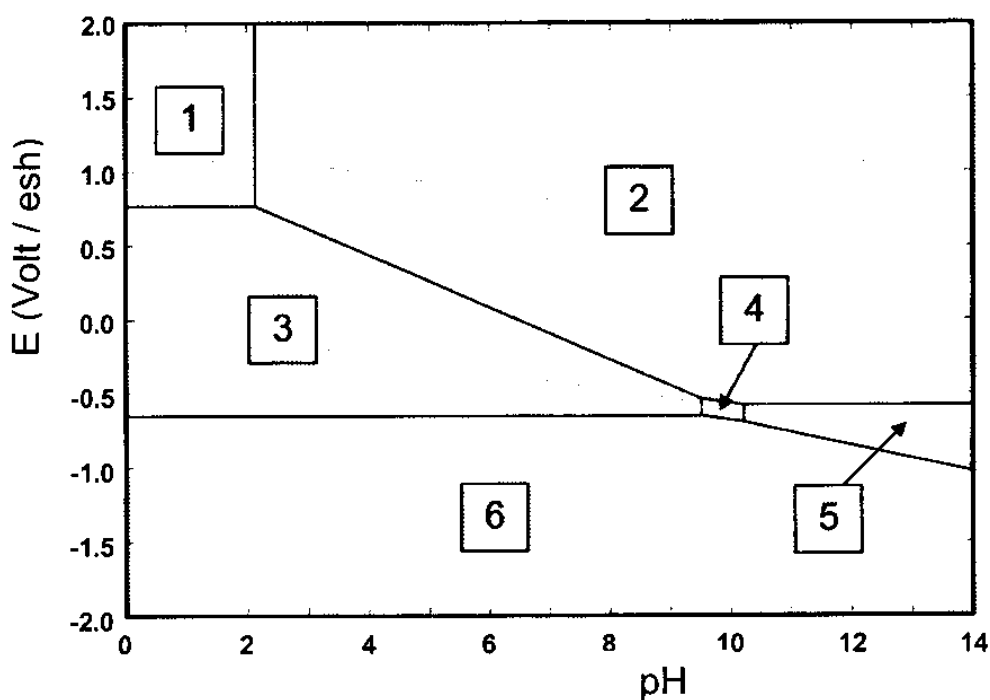


Fig. 1. Diagramme potentiel-pH du système fer-eau à 25°C tracé pour une concentration des espèces dissoutes du fer (II) et du fer (III) de $1 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

III. Détection de posture (Centrale PSI 2014)

Nous abordons dans cette partie l'étude du dispositif permettant de détecter la position et l'orientation de la tête du pilote par rapport au cockpit de l'hélicoptère. Il est constitué d'un « cube émetteur » d'environ 2 cm de côté, solidaire du cockpit et fixé au-dessus de la tête du pilote, et d'un « cube récepteur » identique au précédent, situé dans le casque du pilote. Les cubes sont constitués chacun de trois paires de bobines circulaires identiques, une paire par axe du cube. Chaque bobine plate est constituée de N spires jointives et on néglige l'épaisseur de l'enroulement correspondant.

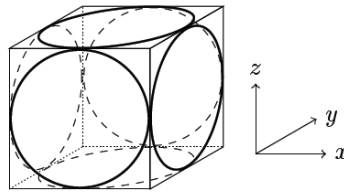


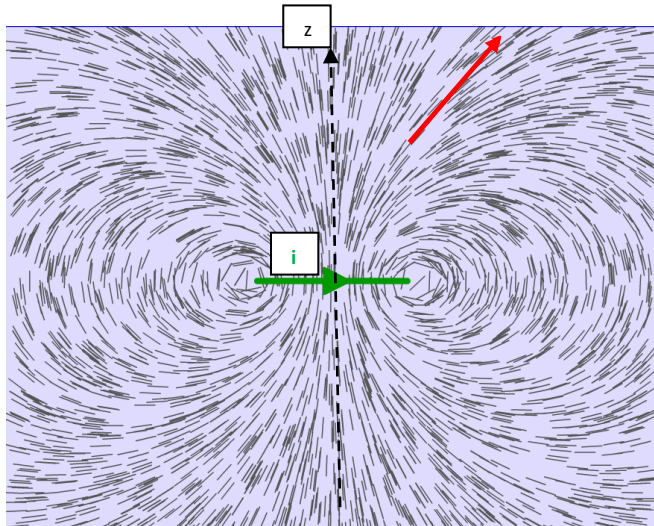
Figure 8

III.A – Paire de bobines parallèles

Chaque paire de bobines est disposée selon un arrangement particulier que l'on va déterminer et dont on va voir l'intérêt dans le contexte du problème posé.

III.A.1) On considère dans un premier temps une spire unique de centre O et d'axe Oz parcourue par un courant i constant.

- Quels sont les éléments de symétrie et les invariances de la distribution de courant ?
- Montrer que ces éléments sont en accord avec la carte de champ ci-dessous (le plan représenté est un plan quelconque contenant Oz) :



- La flèche oblique rouge représente le champ en un point M du plan ; représenter le champ en M' symétrique de M par rapport au plan de la spire.

Le calcul du champ créé par une bobine plate d'axe Oz , centrée en O , constituée de N spires identiques à la précédente permet d'obtenir la relation ci-dessous :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N i a^2}{2} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z, \text{ où } a \text{ est le rayon de la bobine et } M \text{ un point de l'axe } Oz.$$

III.A.2) On considère maintenant deux bobines identiques à la précédente, de même axe de symétrie Oz et parcourues par le même courant i , dans le même sens. Les bobines sont disposées symétriquement par rapport à l'origine O et sont distantes de $2d$.

a) Calculer le champ magnétique total en tout point M de l'axe Oz en fonction notamment de la cote z de M , du rayon a des bobines et de la distance d .

b) Montrer que le champ magnétique total en un point M de l'axe, très éloigné des bobines, s'écrit :

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 N i}{2a} \left(\frac{a}{z}\right)^3 \left(2 + 12 \left(\frac{d}{z}\right)^2 - 3 \left(\frac{a}{z}\right)^2\right) \vec{u}_z$$

III.A.3) À quelle condition sur d , le champ \vec{B} créé par les bobines à grande distance est-il dipolaire ? Que vaut alors le moment magnétique \vec{m} équivalent aux deux bobines ? (Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique est rappelé en fin d'énoncé.)

La disposition des bobines d'une paire qui vient d'être déterminée, parallèles et orientées dans le même sens, est donc celle qui réalise le mieux l'approximation dipolaire.

III.B – Détection de posture : principe de fonctionnement

Chaque paire de bobines parallèles émettrices est alimentée séquentiellement par un courant sinusoïdal de pulsation ω_0 pendant une durée τ où $\omega_0\tau \gg 1$. En d'autres termes, la paire de bobines d'axe Ox est alimentée pendant l'intervalle de temps $[0, \tau]$, la paire de bobines d'axe Oy est alimentée pendant l'intervalle de temps $[\tau, 2\tau]$ et la paire de bobines d'axe Oz est alimentée pendant l'intervalle de temps $[2\tau, 3\tau]$. On recommence ensuite le cycle.

Au cours de l'intervalle $[0, \tau]$, on mesure la tension aux bornes des trois paires de bobines parallèles réceptrices (deux bobines étant montées en série au sein d'une paire associée à un axe). On procède de même au cours des intervalles $[\tau, 2\tau]$ et $[2\tau, 3\tau]$. Les informations ainsi collectées vont nous renseigner sur l'orientation de la tête du pilote, dont le « cube récepteur » est solidaire.

III.B.1) La fréquence du signal alimentant les bobines émettrices vaut $f_0 = 50\text{kHz}$. Y a-t-il lieu de tenir compte de la propagation entre les bobines émettrices et les bobines réceptrices ? Peut-on utiliser la formule du champ dipolaire employée à la question III.A.3 pour évaluer le champ magnétique créé par les bobines émettrices ?

La structure dipolaire du champ nous permet de connaître précisément la position du centre du cube récepteur par rapport au centre du cube émetteur¹.

Dans la suite, on supposera, pour simplifier, que le centre O' du cube récepteur est à la verticale du centre O du cube émetteur. On note D , la distance séparant O et O' .

¹ En réalité, le champ n'est pas parfaitement dipolaire du fait, notamment, des perturbations électromagnétiques de l'environnement. On doit alors réaliser une cartographie du champ magnétique dans la zone entourant le casque du pilote.

III.B.2) On se place dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$: seules les bobines émettrices d'axe Ox sont donc alimentées et parcourues par le courant $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$. On considère l'état de référence pour lequel le cube récepteur centré en O' a ses axes $(O'x, O'y, O'z)$ parallèles à ceux du cube émetteur.

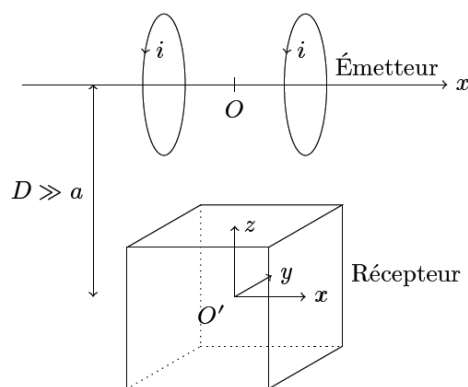


Figure 9

- Que vaut le champ magnétique $\vec{B}(O', t)$? Selon quel axe est-il dirigé ?
- Que vaut la force électromotrice $e_x(t)$ induite dans la paire de bobines réceptrices d'axe $O'x$? On supposera ces bobines orientées dans le sens direct relativement à l'axe $O'x$. Que peut-on dire des forces électromotrices induites dans les paires de bobines d'axes respectifs $O'y$ et $O'z$?
- On suppose maintenant que le cube récepteur subit une rotation d'angle θ_x autour de son axe $O'x$ par rapport à l'état de référence. Répondre aux mêmes questions qu'en b. Que constatez-vous ?
- On revient à l'état de référence et on fait subir au cube récepteur une rotation d'angle θ_y autour de son axe $O'y$. Calculer les nouvelles valeurs prises par les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{z'}(t)$ induites dans les paires de bobines d'axes respectifs $O'x$ et $O'z$ en fonction de $e_x(t)$ et de l'angle θ_y . On adoptera la même convention d'orientation pour les paires de bobines d'axes $O'y$ et $O'z$ relativement à leurs axes respectifs que pour la paire de bobines d'axe $O'x$.
- On revient à l'état de référence et on fait subir au cube récepteur une rotation d'angle θ_z autour de son axe $O'z$. Calculer les nouvelles valeurs prises par les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{y'}(t)$ induites dans les paires de bobines d'axes respectifs $O'x$ et $O'y$ en fonction de $e_x(t)$ et de l'angle θ_z .
- Les résultats obtenus aux questions précédentes montrent que la force électromotrice $e_{x'}(t)$ dépend à la fois des rotations d'axes $O'y$ et $O'z$. La composition des rotations étant une opération non triviale, on décide de s'en affranchir en s'abstenant de mesurer $e_{x'}(t)$ pendant l'intervalle de temps $[0, \tau]$. On posera donc : $e_{x'}(t) = 0$ dans cet intervalle.

Montrer qu'on peut formellement écrire les résultats obtenus dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$ sous forme d'une matrice liant les vecteurs $(e_{x'}(t), e_{y'}(t), e_{z'}(t))$ et $(e_x(t), 0, 0)$.

III.B.3) On se place dans l'intervalle de temps $[\tau, 2\tau]$, seules les bobines émettrices d'axe Oy sont donc alimentées et parcourues par le courant $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$. De manière analogue à la démarche adoptée en **III.B.2**, on ne mesure que les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{z'}(t)$. En procédant comme ci-dessus, établir la relation matricielle liant les vecteurs $(e_{x'}(t), e_{y'}(t), e_{z'}(t))$ et $(0, e_y(t), 0)$, où $e_y(t)$ désigne la force électromotrice induite dans la paire de bobines d'axe $O'y$ dans la configuration de référence.

III.B.4) Enfin, on se place dans l'intervalle de temps $[2\tau, 3\tau]$, seules les bobines émettrices d'axe Oz sont donc alimentées et parcourues par le courant $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$. De manière analogue à la démarche adoptée en **III.B.2**, on ne mesure que les forces électromotrices $e_{x'}(t)$ et $e_{y'}(t)$. En procédant comme ci-dessus, établir la relation matricielle liant les vecteurs $(e_{x'}(t), e_{y'}(t), e_{z'}(t))$ et $(0, 0, e_z(t))$, où $e_z(t)$ désigne la force électromotrice induite dans la paire de bobines d'axe $O'z$ dans la configuration de référence.

III.B.5) Synthétiser les mesures effectuées au cours des trois intervalles de temps $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$ et $[2\tau, 3\tau]$ à l'aide d'une unique relation matricielle. Justifier que l'on a bien réalisé une détection de posture. Sachant que $\tau \approx 5$ ms et que le temps de réponse maximal admissible est de l'ordre de 20 ms, le cahier des charges vous paraît-il rempli ?

Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Formulaire

Développement limité au voisinage de 0 :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{m} = m\vec{u}_z$ en coordonnées sphériques :

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

IV. Magnétisme et Imagerie médicale (CCP PSI 2014)

A) Création d'un champ magnétique intense à l'aide d'un solénoïde :

L'imagerie médicale a besoin de champ magnétique intense, permanent et uniforme. On se propose ici de dimensionner une bobine dans laquelle règne un champ magnétique de 2T.

Résistance électrique d'un conducteur ohmique :

On considère un conducteur ohmique (figure 3), de conductivité électrique γ , de section S , de longueur h , parcouru par un courant électrique continu uniformément réparti de densité $\vec{j}_e = j_e \vec{e}_z$.

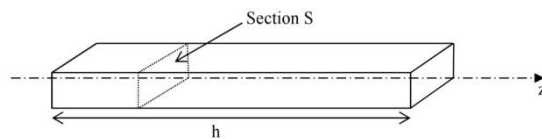


Figure 3 : conducteur ohmique

33) Exprimer en fonction de γ et de \vec{j}_e , le champ électrique \vec{E} qui règne à l'intérieur de ce conducteur.

34) Donner en fonction de γ , j_e et des caractéristiques géométriques de ce conducteur, les expressions du courant électrique I traversant ce conducteur et de la différence de potentiel U aux bornes de ce conducteur.

35) En déduire, en fonction de γ et des caractéristiques géométriques de ce conducteur, la résistance électrique R_Ω de ce conducteur.

Caractéristiques de la bobine à température ambiante :

On suppose ici que la bobine est maintenue à température ambiante $T=300K$.

La bobine (figure 4, ci-après) est assimilée à un solénoïde d'axe Oz, de longueur L, de rayon R_{moy} avec $R_{moy} \ll L$. Les effets de bords sont négligés, le solénoïde est donc considéré comme infini. Il est constitué de spires jointives d'un fil de cuivre de diamètre d et de conductivité électrique γ_{Cu} . Chaque spire est parcourue par un courant I. Il comporte p couches de bobinage superposées.

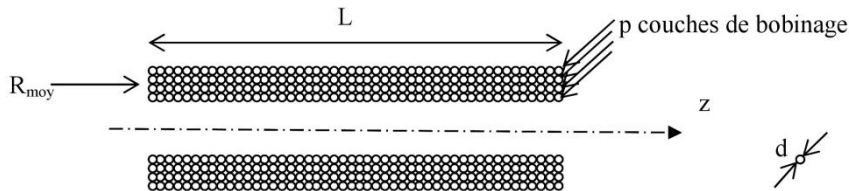


Figure 4 : bobine

- 36) a)** Sur une seule couche de bobinage, combien y-a-t-il de spires jointives par unité de longueur de solénoïde ?
b) Combien de spires par unité de longueur comporte ce solénoïde ?
- 37) a)** Donner, en fonction de d, p, I et μ_0 , l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde.
b) Application numérique : $B = 2,0T$; $d = 3,0mm$; $I = 35A$. Déterminer p.
- 38) a)** En assimilant le rayon de chaque spire au rayon moyen R_{moy} , exprimer la longueur, L_{fil} , de fil nécessaire à la réalisation de cette bobine en fonction de R_{moy} , d, p et L.
b) Application numérique : $L = 1,8m$ et $R_{moy} = 50cm$. Evaluer L_{fil} .
- 39) a)** Exprimer en fonction de γ_{Cu} , de L_{fil} et de d la résistance électrique R_{elec} de la bobine.
b) Application numérique : évaluer la puissance P_J , dissipée par effet Joule dans la bobine. Commenter.

Caractéristiques de la bobine refroidie à 77K :

On suppose ici que la bobine est maintenue à la température de 77K.

Pour diminuer la puissance dissipée, on peut envisager de refroidir le conducteur en cuivre par l'intermédiaire d'un bain d'azote liquide à 77K. On peut alors imposer dans un conducteur de cuivre, de même diamètre $d = 3mm$, un courant plus important $I' = 80A$. On réduit ainsi le nombre de spire de la bobine et donc sa résistance électrique et son rayon moyen.

- 40) a)** Quel est alors le nombre de couches de bobinage, p' , à superposer pour obtenir un champ magnétique de 2T ?
b) En assimilant la rayon de chaque spire au nouveau rayon moyen $R'_{moy} = 40cm$, évaluer la nouvelle puissance dissipée par effet Joule, P'_J , dans la bobine.

Compte-tenu du coût de la réfrigération à 77K, il faut tenir compte de l'efficacité de la machine thermique assurant le maintien de cette basse température.

- 41) On considère une machine frigorifique cyclique et réversible qui assure, par l'intermédiaire d'un fluide caloporteur, les transferts thermiques entre deux sources de températures constantes T_f et T_c .
- a) En effectuant un bilan énergétique et un bilan entropique sur un système bien défini, exprimer l'efficacité e_{rev} de cette machine en fonction de T_f et T_c .
- b) Application numérique : $T_f = 77K$ et $T_c = 300K$. Evaluer e_{rev} .
- 42) Evaluer la puissance P' , minimale, nécessaire pour absorber la puissance P'_j dissipée dans la bobine en cuivre refroidi. Commenter.

B) Puissance dissipée dans le supraconducteur lors des régimes transitoires :

Si les supraconducteurs sont dépourvus de pertes en régime continu, il n'en est pas de même en régime variable. Pour les bobines alimentées en régime continu, ces pertes ont lieu lors des deux régimes transitoires qui correspondent en début d'utilisation de la bobine à l'installation du courant dans le conducteur, puis en fin d'utilisation de la bobine, lors de la redescente à zéro de ce courant.

On se propose ici de déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée par unité de longueur de conducteur, lors de la première montée de courant, dans une situation dite de champ propre, c'est-à-dire lorsqu'une portion de conducteur est soumise aux variations temporelles du champ magnétique qu'il crée sur lui-même.

On assimile le supraconducteur (figure 5) à un fil rectiligne infini suivant l'axe Oz, de rayon R. On adopte les coordonnées cylindriques.

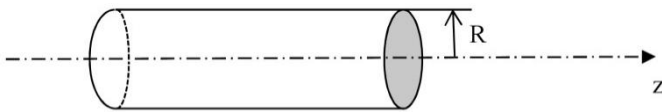


Figure 5 : supraconducteur

Compte-tenu des invariances du problème, la densité volumique de courant, notée \vec{j}_e , dans le supraconducteur ne dépend que de r et est portée par le vecteur \vec{e}_z . On a $\vec{j}_e = j_e(r)\vec{e}_z$. Pour un courant de transport I donné, la densité de courant n'est pas uniforme dans le supraconducteur, son amplitude vaut $\pm j_0$ ou 0, où j_0 est une constante. Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique.

- 43) Déterminer en fonction de j_0 et de R la valeur maximale I_c , dite valeur critique du courant de transport de ce conducteur.

Etude de la première montée de courant dans le supraconducteur :

On ne s'intéresse ici qu'à la première montée du courant $I(t)$ dans le supraconducteur.

On suppose que cette première montée s'effectue, pendant une durée T, suivant une consigne en rampe de sorte que : $I(t) = \frac{I_0}{T}t$, où I_0 est la valeur finale du courant dans le supraconducteur.

Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique, de sorte qu'il se répartit, à un instant t de cette première étape, à la périphérie du supraconducteur dans la zone : $r_1(t) < r < R$ (figure 6).

On a : $j_e(r,t) = 0$ pour $r < r_1(t)$ et $j_e(r,t) = j_0$ pour $r > r_1(t)$.

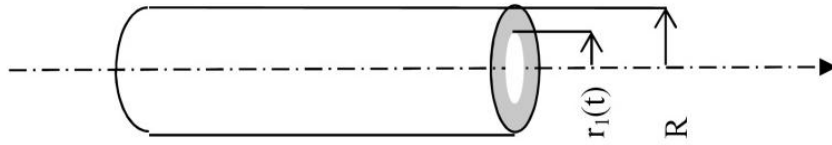


Figure 6 : répartition du courant dans le supraconducteur

- 44) On définit par $u=I_0/I_c$ le taux d'utilisation du supraconducteur. Exprimer u en fonction de j_0 , R et I_0 .
- 45) a) Déterminer la relation qui existe entre $I(t)$, j_0 , $r_1(t)$ et R .
 b) En déduire l'expression de $r_1(t)$ en fonction de R , u , T et t .
 c) Exprimer $r_1(T)$ en fonction de u et R .
- 46) a) A l'aide des propriétés de symétries et d'invariance, préciser de quelle(s) variable(s) de l'espace dépend le champ magnétique \vec{B} dans le supraconducteur et par quel(s) vecteur(s) de base il est porté.
 b) Par application du théorème d'Ampère, dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, sur un contour que l'on précisera, déterminer à l'instant t le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ dans la zone : $r \in [0, r_1(t)]$.
 c) De même, déterminer en fonction de μ_0 , j_0 et $r_1(t)$, le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ dans la zone : $r \in [r_1(t), R]$.
 d) Tracer l'allure de la fonction $\|\vec{B}(r, t)\|$ à un instant t , pour $r \in [0, R]$.
- 47) a) Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday. Donner le nom du phénomène physique régi par cette loi. Historiquement, à quel siècle a-t-elle été découverte ?

Pour les questions 47)b) et 47)c), on admettra que toute contribution du champ électrique, qui ne dépend que de l'espace ou que du temps, sera assimilée à la fonction nulle.

- b) Que vaut le champ électrique $\vec{E}(r, t) = E(r, t)\vec{e}_z$ pour $r < r_1(t)$?
 c) En remarquant que le champ électrique est continu en $r_1(t)$ et qu'il peut s'écrire sous la forme $\vec{E}(r, t) = E(r, t)\vec{e}_z$, montrer que $E(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right)$ pour $r \in [r_1(t), R]$.
- 48) Quelle est l'unité de \vec{E} ? Proposer, en quelques lignes, un protocole permettant de visualiser expérimentalement le champ électrique $E(R, t)$ sur un écran d'oscilloscope ou d'ordinateur.
- 49) Donner l'expression de la densité volumique locale et instantanée de puissance dissipée dans le supraconducteur, notée $p_v(r, t)$:
 a) dans la zone : $r \in [0, r_1(t)]$.
 b) dans la zone : $r \in [r_1(t), R]$.
- 50) Par intégration sur l'espace, en déduire, en fonction de μ_0 , I_0 , T , L_{supra} , u et t , l'expression de la puissance $P_{\text{elec}}(t)$ dissipée dans une longueur L_{supra} de supraconducteur à l'instant t lors de la première montée de courant.

- 51) a)** Par intégration sur le temps, déterminer l'énergie Q dissipée lors de la première montée du courant dans un supraconducteur de longueur L_{supra} en fonction de μ_0 , I_0 , L_{supra} et u .
- b)** Est-il utile d'augmenter la durée T d'établissement de ce courant pour réduire l'énergie dissipée dans le supraconducteur ?
- 52)** La machine thermique qui assure le refroidissement du supraconducteur à 4,2K a une efficacité de $1,5 \cdot 10^{-3}$.
On donne $I_0 = 445$ A, $L_{\text{supra}} = 14000$ m et $u = 0,7$. Evaluer l'énergie consommée Q_{amb} par le réfrigérateur devant absorber l'énergie Q dissipée lors de la première montée de courant. Commenter.

Constantes physiques :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}.$$

Conductivité électrique du cuivre :

$$\gamma_{\text{Cu}}(77 \text{ K}) = 3,3 \cdot 10^8 \text{ S.m}^{-1} ; \gamma_{\text{Cu}}(300 \text{ K}) = 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}.$$

Formulaire mathématique :

Fonction : $f(x)$	Primitive : $F(x)$
$x \ln \frac{x}{x_0}$	$\frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) - \frac{x^2}{4} + c^{\text{ste}}$
$\ln(1 - \alpha x)$	$\frac{(1 - \alpha x) - (1 - \alpha x) \ln(1 - \alpha x)}{\alpha} + c^{\text{ste}}$

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$