

**I. ETUDE D'UN TRANSFORMATEUR DE COURANT (E3a PSI - Extrait)**

Toutes les figures appelées dans le texte sont en page 3.

**A / ÉTUDE DU TRANSFORMATEUR PARFAIT**

Considérons un transformateur constitué, dans sa configuration la plus simple, d'un noyau torique de matériau ferromagnétique assimilé à un milieu linéaire homogène isotrope (perméabilité relative  $\mu_r$  considérée comme infinie, rayon moyen  $r_T$ , périmètre moyen  $\ell_T$ , section circulaire d'aire  $S_T$ ) sur lequel sont bobinés deux enroulements conducteurs primaire ( $n_1$  spires) et secondaire ( $n_2$  spires), galvaniquement isolés (voir figure 1). La ligne moyenne de champ magnétique  $\vec{B}$  est tracée en pointillés, accompagnée de son orientation. Le champ magnétique sera considéré comme uniforme en tout point de la section droite du tore. Ce transformateur est alimenté par une tension alternative  $v_1$  de pulsation  $\omega$ .

**A1.** On s'intéresse dans un premier temps à un transformateur parfait. Cette définition implique la réalisation simultanée de trois conditions; énoncer lesquelles.

**A2\*a.** Écrire le théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi; en déduire une relation entre l'amplitude de l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et les intensités  $i_1$  et  $i_2$  traversant les enroulements primaire et secondaire.

**A2\*b.** Déterminer l'expression de  $\phi_c$ , le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  (flux commun aux deux enroulements). Quel est le rôle joué par cette grandeur dans la description du fonctionnement du transformateur ?

**A2\*c.** Expliquer l'apparition de f.é.m. induites  $e_1$  et  $e_2$  aux bornes des bobinages; en déduire le schéma d'un quadripôle équivalent où apparaissent  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $e_1$  et  $e_2$ .

**A3\*a.** Définir et établir le rapport de transformation en tension (on pourra introduire le rapport  $n = n_2/n_1$ ).

**A3\*b.** Définir et établir de même le rapport de transformation en courant (on précisera dans ce cas l'approximation réalisée au niveau de la perméabilité du matériau magnétique).

**A3\*c.** A partir des conventions de la figure 1, exprimer les puissances instantanées au primaire et au secondaire du transformateur. Conclure.

**B / TRANSFORMATEUR RÉEL**

Examinons pour débiter, comme cause d'écart entre le fonctionnement d'un transformateur réel et le modèle de transformateur parfait, l'effet de la perméabilité du matériau constituant le tore (le milieu demeurant linéaire, homogène et isotrope).

**B1\*a.** Dans le cas d'un matériau possédant une perméabilité relative  $\mu_r$  finie, reprendre l'expression du théorème d'Ampère (A2\*a) et démontrer l'existence au primaire d'un courant magnétisant  $i_{1\mu}$  (voir figure 2) dont on donnera l'expression.

**B1\*b.** Montrer que dans le cas d'un secondaire en circuit ouvert, le schéma proposé, avec une inductance magnétisante  $L_{1\mu}$  aux bornes de l'enroulement primaire, permet de rendre compte de ce courant magnétisant.

Préciser l'expression de  $L_{1\mu}$ .

Analysons maintenant les pertes du transformateur réel à partir du schéma équivalent fourni figure 3.

**B2\*a.** Quel type de pertes doit-on associer aux deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  ? Comment en limiter l'importance ?

**B2\*b.** A quel phénomène peut-on relier les inductances  $\ell_1$  et  $\ell_2$  ?

**B2\*c.** La résistance  $R_\mu$  modélise les pertes « fer ». Rappeler le sens physique de ces pertes et préciser comment on peut les réduire.

## C / TRANSFORMATEUR DE COURANT

Le transformateur le plus simple est constitué de trois parties principales, du point de vue électromagnétique: un circuit magnétique CM (de géométrie torique pour minimiser les fuites magnétiques, de périmètre moyen  $\ell_T$ , de section d'aire  $S_T$ , de perméabilité relative  $\mu_r$  élevée), un enroulement primaire  $P$  le plus souvent réduit à un seul conducteur traversant le tore, un enroulement secondaire  $S$  ( $n$  spires) bobiné à spires jointives sur le tore. Le courant à mesurer  $i_1$  (courant alternatif de pulsation  $\omega$ ) circule dans le primaire tandis que le secondaire est relié à une résistance de mesure  $R$  (figure 4).

On négligera la résistance d'enroulement du secondaire.

**C.1\*a.** En utilisant le résultat du **A.2\*a.** et **en prenant garde aux sens des courants**, déterminer la tension  $V$  aux bornes de  $R$ .

**CI\*b.** Quel type de courant ce transformateur peut-il mesurer ?

Qu'en est-il d'un courant continu ?

On définit l'erreur relative de précision d'un transformateur par:  $\varepsilon_p = \left| \frac{nI_2 - I_1}{I_1} \right|$ .

**CI\*c.** Exprimer  $\varepsilon_p$  en fonction des caractéristiques du matériau et des données géométriques. Analyser les paramètres permettant de réduire cette erreur de précision.

### Comportement en basse fréquence du transformateur de courant

Considérons un modèle basse fréquence (BF) simplifié (figure 5) dans lequel les résistances et les inductances de fuite des enroulements ont été négligées. Le primaire est alimenté par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , le secondaire est fermé sur une résistance  $R$ .

**C2\*a** Déterminer la fonction de transfert en courant de ce modèle BF:

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{I}_2(j\omega) / \underline{I}_1(j\omega).$$

**C2\*b.** Tracer le diagramme asymptotique de Bode en amplitude. Évaluer la fréquence de coupure  $f_{BF}$ . Analyser la réponse en fréquence du transformateur.

**C2\*c.** Dans le cas de signaux dont le fondamental est à 50 Hz, examiner, pour un rapport  $R/n$  fixé, les contraintes sur l'inductance magnétisante  $L_\mu$ .

### Comportement en haute fréquence du transformateur de courant

A haute fréquence (HF) apparaissent les capacités des enroulements ( $C_p$  et  $C_s$ ) et la capacité de couplage  $C_{ps}$  entre primaire et secondaire, comme le montre le modèle décrit sur la figure 6 (les grandeurs telles que  $L_\mu$ ,  $R_\mu$ ,  $\ell_p$  et  $\ell_s$  ont la même signification que précédemment).

Afin de déterminer la réponse de ce modèle en HF, simplifions-le

- \* le courant dans  $L_\mu$  étant faible en haute fréquence, on pourra le négliger,
- \* pour des matériaux à faibles pertes, l'effet de  $R_\mu$  ne sera pas sensible,
- \* grâce à l'interposition d'écrans, on fera abstraction de  $C_{ps}$ .

**C3.** Simplifier la représentation du modèle haute fréquence en remplaçant l'ensemble {transformateur + charge} par un dipôle équivalent.

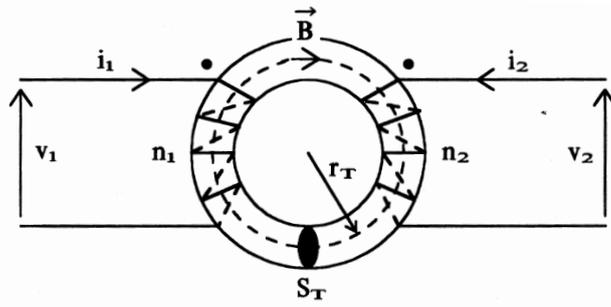


Figure 1.

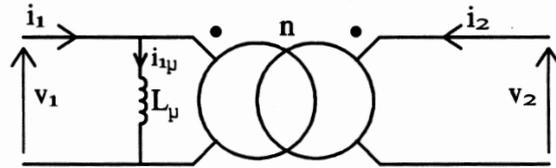


Figure 2.

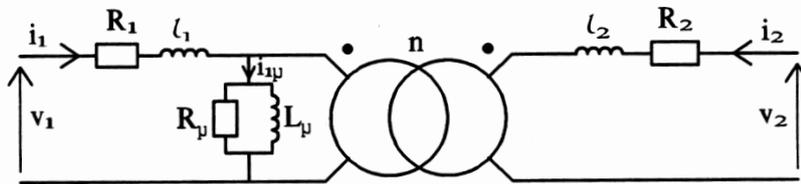


Figure 3.

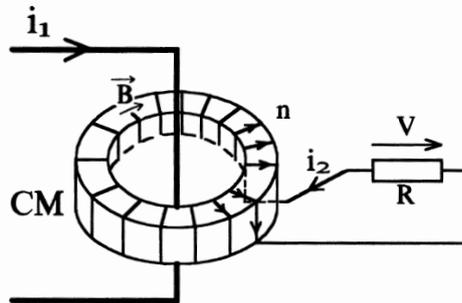


Figure 4.

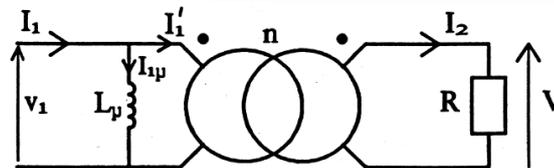


Figure 5.

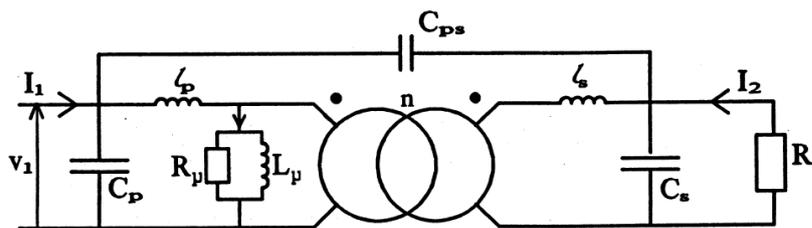


Figure 6.

## II. MOTEUR SYNCHROME AUTOPILOTE

### I) Moteur synchrone à aimants permanents

Le rotor de rayon  $a = 39 \text{ mm}$ , d'axe  $Oz$  et de hauteur  $h = 100 \text{ mm}$  d'une machine synchrone « à concentration de flux » comporte quatre aimants permanents d'épaisseur  $b = 1,0 \text{ cm}$ . On rappelle que  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

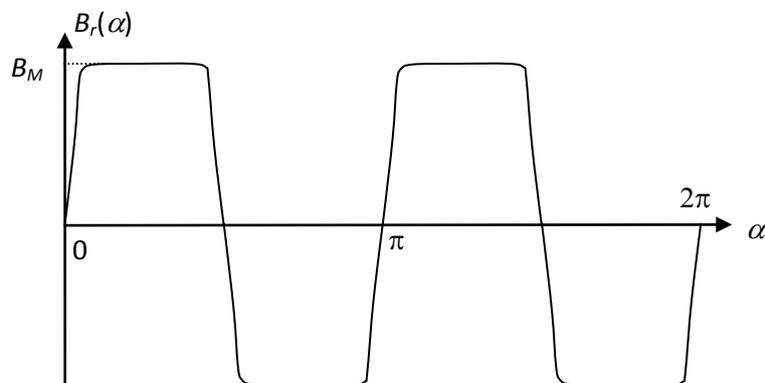
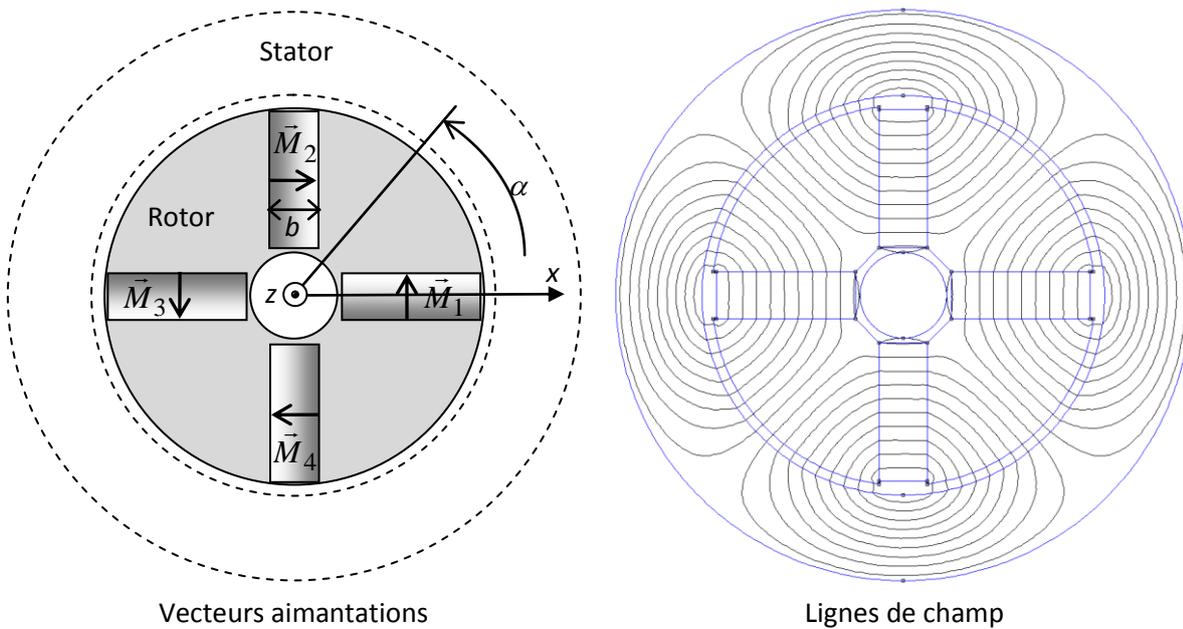
Les vecteurs aimantations  $\vec{M}_i$  de ces quatre aimants sont uniformes, ont la même norme  $M_0$  et leurs directions sont données dans le schéma de gauche ci-dessous.

On rappelle que dans les aimants le lien entre  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{M}$  est  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ .

En dehors des zones aimantées, le rotor et le stator sont réalisés dans un matériau ferromagnétique supposé linéaire et de perméabilité magnétique  $\mu_r \gg 1$ . Ils sont séparés par un entrefer d'épaisseur  $e = 0,7 \text{ mm}$  constante et de perméabilité magnétique relative égale à un.

On considère tout d'abord que le rotor est fixe.

Un logiciel de simulation fournit le tracé des lignes de champ du champ magnétique créé par le rotor (schéma de droite) et la valeur de la composante radiale  $B_r(\alpha)$  de ce champ dans l'entrefer, en fonction de l'angle  $\alpha$ .



Champ dans l'entrefer

1) Préciser sur un schéma l'orientation des lignes de champ. Donner la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dans chacun des trois milieux (matériau ferromagnétique, aimant et entrefer).

2) En appliquant le théorème d'Ampère au vecteur excitation magnétique et la conservation du flux du champ magnétique, montrer que  $M_0 = (1 + \frac{2e}{b} \frac{B_M}{\mu_0})$ , où  $B_M$  est le champ dans les aimants. Quelle doit être la valeur de  $M_0$  pour que  $B_M = 1,0 T$  ? Faire l'application numérique.

3) Quelle est la période de  $B_r(\alpha)$  ? Quelle est sa parité ? Donner la forme du terme fondamental du développement en série de Fourier de  $B_r(\alpha)$ , supposé d'amplitude égale à  $B_1 = \frac{4}{\pi} B_M$ . Par la suite, on supposera que l'on peut confondre  $B_r(\alpha)$  avec ce terme fondamental.

*On suppose maintenant que le rotor tourne autour de l'axe Oz, sa rotation étant repérée par la donnée de l'angle  $\theta(t)$  que fait l'aimant (1) avec l'axe Ox.*

4) Montrer que la valeur du champ rotorique  $\vec{B}_R$  en un point fixe de l'entrefer repéré par l'angle  $\alpha$ , en fonction de  $B_1$ ,  $\theta(t)$  et  $\alpha$  est donnée par :  $\vec{B}_R(\alpha, t) = B_1 \sin[2(\alpha - \theta(t))] \vec{e}_r$ , où est le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques.

5) Les enroulements statoriques comportent  $p$  paires de bobines alimentées par des courants sinusoïdaux de pulsation  $\omega$  et créent dans l'entrefer un champ tournant de la forme  $\vec{B}_S(\alpha, t) = B_0 [\cos(p\alpha)\cos(\omega t) + \sin(p\alpha)\sin(\omega t)] \vec{e}_r = B_0 \cos(\omega t - p\alpha) \vec{e}_r$ , où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques et  $B_0 = 0,60 T$ .

5.i) Calculer l'énergie magnétique  $W_m$  contenue dans l'entrefer. Pour quelle valeur de  $p$  cette énergie est-elle fonction de l'angle  $\theta$  ?

*On suppose que  $p$  garde cette valeur dans toute la suite.*

5.ii) Que peut-on dire de l'énergie magnétique contenue dans le matériau ferromagnétique ?

5.iii) L'énergie magnétique contenue dans les aimants est-elle fonction de l'angle  $\theta$  ?

6) Calculer le moment du couple électromagnétique subi par le rotor :  $\Gamma_e = \left( \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_i$

7) On suppose que le rotor tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$ , c'est-à-dire que  $\theta(t) = \Omega t + \theta_0$ . Pour quelle valeur de  $\Omega$  la valeur moyenne du moment du couple est-elle non nulle ? Donner la valeur de  $\Omega$  en tours par minute si  $\frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$ .

8) Comment faut-il choisir  $\theta_0$  pour que le couple moyen ait sa valeur maximale  $\Gamma_M$  ? Quelle est la valeur numérique de  $\Gamma_M$  ?

9) Tracer les variations du couple moyen en fonction de  $\theta_0$ . Pour quelles valeurs de  $\theta_0$  ce couple est-il moteur ? Comparer les rôles des aimants 1 et 3 puis des aimants 2 et 4. Montrer qu'on peut alors se contenter d'une étude du système pour  $\theta_0$  appartenant à  $[0, \pi]$ .

10) Le moteur entraîne une charge de moment  $\Gamma_r = -\frac{\Gamma_M}{2}$ . Quelles sont les valeurs possibles pour  $\theta_0$  ? Quelle est celle qui correspond à un fonctionnement stable ?

## II) Autopilotage

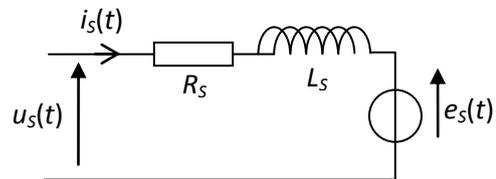
On note  $\phi(t)$  le flux du champ magnétique produit par le rotor du moteur synchrone dans l'un des  $p$  enroulements statoriques. Ce flux, dépendant de la position du rotor par l'intermédiaire de l'angle  $\theta(t)$ , est décrit par le premier harmonique de son développement en série de Fourier

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cos(2\theta(t) + \beta)$$

avec  $\Phi_0 > 0$  et  $\beta$  constante qui dépend de l'enroulement considéré.

11) Donner la valeur efficace  $E_S$  de la force contre électromotrice induite dans l'enroulement par le rotor tournant à la vitesse  $\Omega$ .

12) On représente un enroulement statorique par le schéma électrique ci-contre. On étudie le régime permanent sinusoïdal de pulsation



$\omega$ . On note  $\varphi$  le déphasage de la tension  $u_S(t)$  par rapport au courant  $i_S(t)$  et  $\psi$  le déphasage de la fcem  $e_S(t)$  par rapport au courant  $i_S(t)$ , supposé compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

Après avoir précisé la relation entre  $\Omega$  et  $\omega$ , donner l'allure du diagramme de Fresnel qui traduit la loi des mailles.

13) On suppose que l'on peut négliger le terme résistif. Donner la relation entre  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $E_S$  et  $U_S$ , valeur efficace de  $u_S(t)$ .

Chaque enroulement statorique du moteur est alimenté par un convertisseur continu alternatif. Ce convertisseur est relié à une source de tension constante de valeur  $U_C$  telle que  $U_C = U_S \cos \varphi$  et qui absorbe le courant constant d'intensité  $I_0$ .

Afin d'assurer en permanence le synchronisme entre le rotor et le champ glissant créé par le stator, ce qui évite tout risque de décrochage, les signaux de commande des interrupteurs des convertisseurs sont élaborés à partir d'impulsions issues d'un capteur qui détecte très précisément la position du rotor. Ainsi, il est possible :

- d'asservir la fréquence des courants statoriques à la vitesse angulaire du rotor ;
- de fixer le déphasage  $\psi$  entre le fondamental du courant  $i(t)$  et la fcem  $e(t)$  pour chaque enroulement du stator. Le moteur ainsi alimenté et contrôlé est dit **autopiloté**.

14) Montrer que la vitesse de rotation de l'arbre du moteur est proportionnelle à  $U_C$ .

15) En supposant que les convertisseurs ont un rendement unitaire et en négligeant les pertes dans le moteur, montrer que le couple exercé par le moteur est proportionnel à  $I_0$ .

16) Le type de moteur étudié ici, avec son pilotage, est souvent appelé moteur à courant continu sans balai ou brushless. Justifier cette expression et indiquer ses avantages par rapport au moteur à courant continu à excitation séparée.

### III. SYNTHÈSE INDUSTRIELLE DE L'AMMONIAC (E3a PC 2016 – Extrait)

#### Présentation

La synthèse de l'ammoniac  $\text{NH}_3$ , au même titre que la synthèse de l'acide sulfurique, est un des procédés catalytiques les plus importants dans l'industrie chimique. À la base de l'industrie des engrais azotés, elle assure l'autosuffisance en céréales de nombreux pays. En 1909, Haber découvre l'effet catalytique du fer sur la réaction entre le diazote  $\text{N}_2$  et le dihydrogène  $\text{H}_2$  :



Très vite, sous l'impulsion de Bosch, le procédé est industrialisé. En 1920, un réacteur produisant 15 mille tonnes d'ammoniac par an est mis en service.

Aujourd'hui, 100 millions de tonnes d'ammoniac sont produites par an par ce procédé : les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques, la température est fixée entre 640 K et 800 K ; la pression est choisie entre  $8 \cdot 10^6$  Pa et  $3 \cdot 10^7$  Pa.

**1.a.** Définir la variance d'un équilibre.

**1.b.** En justifiant soigneusement la réponse, déterminer la variance d'un système en phase gaz soumis à l'équilibre (1) dans le cas général. Commenter le résultat.

**1.c.** Déterminer la variance en tenant compte du fait que le diazote et le dihydrogène sont introduits initialement dans des proportions stœchiométriques.

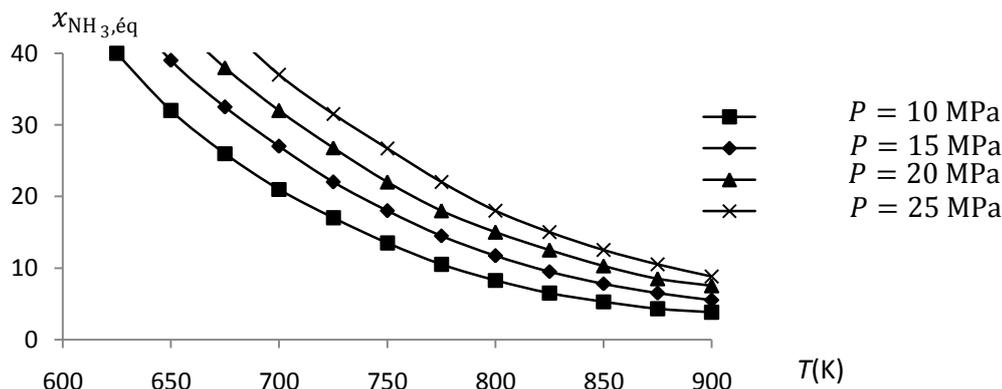
**1.d.** La présence du catalyseur affecte-t-elle la variance ?

#### Influence de la température $T$ et de la pression $P$ sur la composition à l'équilibre

L'objectif de la synthèse est d'optimiser la fraction molaire en ammoniac  $x_{\text{NH}_3}$  à la sortie du réacteur.

On envisage dans un premier temps la situation où l'état d'équilibre thermodynamique est atteint à la sortie du réacteur. Le milieu réactionnel ne contient initialement que du diazote et du dihydrogène en proportions stœchiométriques.

#### **Document 1 – Fraction molaire d'ammoniac à la sortie du réacteur**



2. Indiquer à partir des courbes comment semble évoluer la constante thermodynamique d'équilibre  $K^\circ(T)$  lorsque la température augmente. Rappeler la relation de Van't Hoff.

En déduire le signe de l'enthalpie standard de réaction  $\Delta_r H^\circ$ .

3. Indiquer à partir des courbes si une augmentation isotherme de la pression constitue un atout ou un obstacle pour la synthèse de l'ammoniac.

On se propose de justifier ce résultat. Pour cela, on envisage un système initialement à l'équilibre thermodynamique, à la température  $T$ , à la pression  $P$ , contenant du diazote  $N_{2(g)}$ , du dihydrogène  $H_{2(g)}$  et de l'ammoniac  $NH_{3(g)}$ . Sans modifier la composition du système, on élève la pression de façon isotherme.

4. Exprimer le quotient de réaction  $Q_r$  associé à l'équilibre (1) en fonction des quantités de matière de chaque constituant présent dans le système, de la quantité de matière totale  $n_{tot}$ , de la pression  $P$  et de la pression standard  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ .

5. Indiquer à quoi est égal le quotient de réaction  $Q_{r,eq}$  associé à l'équilibre (1) avant perturbation de la pression.

6. Indiquer en justifiant la réponse comment évolue le quotient de réaction  $Q_r$  après élévation de la pression. En exprimant  $\Delta_r G$  du système, vérifier alors la réponse donnée à la question 3.

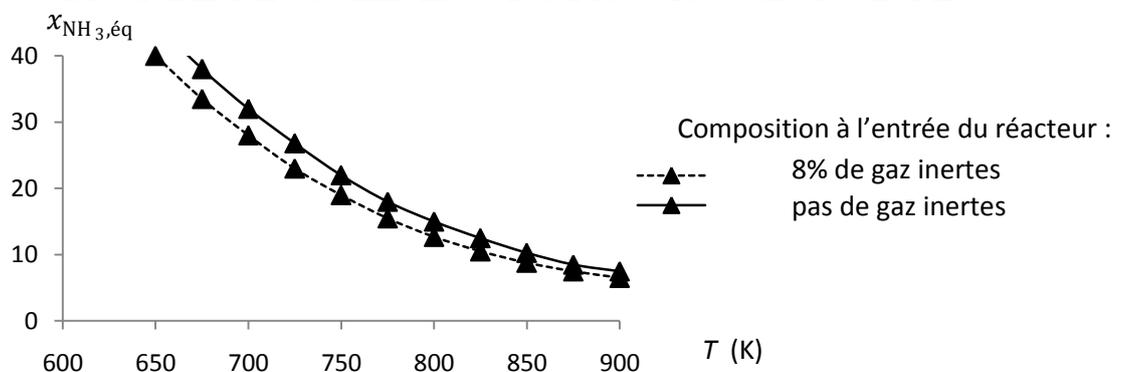
### Influence de la présence de gaz inertes

En réalité, d'autres constituants peuvent intervenir dans la composition du mélange réactionnel initialement introduit dans le réacteur. Les traces de méthane viennent du gaz utilisé lors de la production de dihydrogène par reformage. Les traces d'argon sont issues de l'air dont provient le diazote.

#### **Document 2 – Composition typique du gaz de synthèse à l'entrée du réacteur**

Dihydrogène	$H_{2(g)}$	$x_{H_2} = 0,69$
Diazote	$N_{2(g)}$	$x_{N_2} = 0,23$
Argon	$Ar_{(g)}$	$x_{Ar} = 0,02$
Méthane	$CH_{4(g)}$	$x_{CH_4} = 0,06$

#### **Document 3 – Fraction molaire d'ammoniac à la sortie du réacteur à $P = 20 \text{ MPa}$**



7. Indiquer à partir des courbes si la présence de gaz inertes constitue un atout ou un obstacle pour la synthèse de l'ammoniac.

8. Par un raisonnement analogue à celui mené sur la pression, étudier l'influence – à température et pression constantes – de l'introduction d'un gaz inerte sur la réaction

### Choix de la température $T$

La synthèse de l'ammoniac est réalisée dans un réacteur ouvert fonctionnant en régime permanent à pression constante  $P = 20 \text{ MPa}$ . Pour deux valeurs du temps de passage du mélange réactionnel à travers le réacteur, on détermine expérimentalement le taux d'avancement,  $\tau$ , de la réaction (1) à différentes valeurs de la température  $T$ .

### **Document 4 – Evolution du taux d'avancement en fonction de la température**

- Temps de passage très grand :

$T$ (K)	600	650	700	750	800	850
$\tau$	0,72	0,60	0,48	0,36	0,26	0,19

- Temps de passage court :

$T$ (K)	600	650	700	750	800	850
$\tau$	0,21	0,32	0,38	0,31	0,25	0,19

9. Interpréter ces observations de façon détaillée.