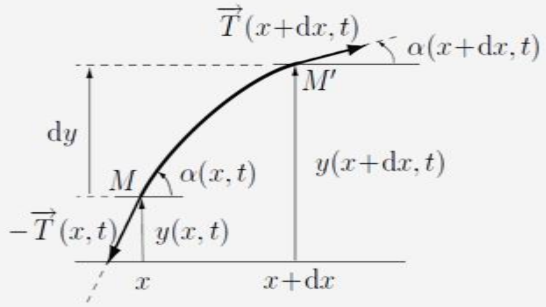
PSI*/PSI 15-16 DS N°5

CORRIGE DE LA PARTIE CORDES

A. Équation de propagation de l'ébranlement

1. a) $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$. Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$: $d\ell = dx$.

b) Soit l'élément de corde MM' compris entre les abscisses x et $x + dx$ (sur la figure les angles ont étés exagérés pour la rendre lisible) :



Puisque le poids est négligé, l'élément de corde, de longueur $d\ell \simeq dx$, de masse $dm = \mu d\ell$, est soumis à :

- la tension de la portion de fil située à droite du point M', soit $\overrightarrow{T}(x + dx, t)$,
- la tension de la portion de fil située à gauche du point M', soit $-\overrightarrow{T}(x, t)$.

Pour obtenir ce résultat il faut appliquer le TRC en un point M quelconque de la corde, de masse nulle, et écrire que l'action en M de la partie droite de la corde sur la partie gauche est égale à l'opposé de l'action de la partie gauche sur la partie droite : $\overrightarrow{Tg}$(x,t) = - $\overrightarrow{Td}$(x,t) = - $\overrightarrow{T}$(x,t).

Le mouvement de la corde ayant lieu selon Oy, le théorème de la résultante cinétique appliqué à cet élément de corde s'écrit :

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T}(x + dx, t) - \overrightarrow{T}(x, t). \qquad (1)$$

Soit en projection sur Oy :

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (T\sin\alpha)(x + dx, t) - (T\sin\alpha)(x, t). \qquad (2)$$

Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$dm = \mu\, dx, \quad \cos\alpha(x,t) = 1 \quad \text{et} \quad \sin\alpha(x,t) = \alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

En se limitant à l'ordre 1 en $\frac{\partial y}{\partial x}$, l'équation (2) s'écrit :

$$\mu\, dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial(T\alpha)}{\partial x}dx. \qquad (3)$$

Mais le module de la tension lui-même est une légère perturbation par rapport à sa valeur T_0 au repos. Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$, $T\alpha = T_0\alpha$ puisque l'angle α est un infiniment petit du premier ordre.

L'équation (3) s'écrit alors, au premier ordre :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Ceci correspond bien à une équation de D'Alembert, avec : c = $\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

2. a) T_0 est une force, donc s'exprime en N ou encore en kg.m.s^{-2}, μ est une masse linéique, donc s'exprime en kg.m^{-1}, $\dfrac{T_0}{\mu}$ s'exprime donc en m^2.s^{-2} : c est bien homogène à une vitesse.

b) La solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle est la somme d'une onde plane progressive dans le sens des x croissants et d'une onde plane progressive dans le sens des x décroissants, les deux à la vitesse c :

$$y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

ou

$$y(x,t) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

c) Pour la corde de guitare : $c = 185$ m.s^{-1}, pour celle de piano : $c = 310$ m.s^{-1} ($\mu = \rho \times s = 8,82$ g.m^{-1}).

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, une grande inertie (µ) fait baisser la célérité alors qu'une grande rigidité (T_0) la fait augmenter. Les ordres de grandeur sont similaires pour les deux instruments et correspondent à des vitesses élevées (on ne voit pas la propagation le long d'une corde).

B. Corde fixée à ses deux extrémités. Modes propres

1. Modes propres, fréquences propres

a) Une onde stationnaire est une onde de la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$, elle ne se propage pas.

b) On cherche des solutions particulières de l'équation de d'Alembert sous la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$ où $f(x)$ est une fonction de l'abscisse seule et $g(t)$ du temps seul.

Alors :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)}$$

en supposant que les fonctions f et g ne sont pas identiquement nulles. Les variables x et t étant indépendantes, si une fonction de x est égale à une fonction de t, elle est nécessairement constante. On pose alors :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = C_0$$

où C_0 est une constante.

Si C_0 est positive, $f(x)$ et $g(t)$ s'écrivent comme la somme de deux exponentielles réelles, l'une croissante, l'autre décroissante. Quand t tend vers l'infini, $g(t)$ tend ou bien vers l'infini (en valeur absolue) ou bien vers 0. Le premier cas n'a pas de réalité physique (et dans ce cas le cadre de l'étude - petites perturbations - n'est plus respecté), le second correspond à un régime transitoire inintéressant. Si C_0 est nul, le problème est le même. Le seul cas physiquement acceptable est donc C_0 négatif. On pose : $C_0 = -k^2$. Alors :

$$\begin{cases} f(x) = A\cos(kx + \psi) \\ g(t) = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{où} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

c) Les conditions aux limites imposent à la fréquence $f = \omega/2\pi$ de ne prendre que certaines valeurs f_n , ce sont les *fréquences propres*. L'élongation correspondante, $y_n(x,t) = y_{0n}\cos(\omega_n t + \varphi)\cos(k_n x + \psi)$ est le *mode propre* associé.

d) La condition $y(0,t) = 0$ impose $\cos(\psi) = 0$. On choisit $\psi = -\dfrac{\pi}{2}$, d'où :

$$y(x,t) = y_0\cos(\omega t + \varphi)\sin(kx)$$

La deuxième condition $y(L,t) = 0$ donne : *sin(kL) = 0* soit $kL = n\pi$ où n est un entier strictement positif. Or $f = \omega/2\pi$ et $k = \omega/c$ donc :

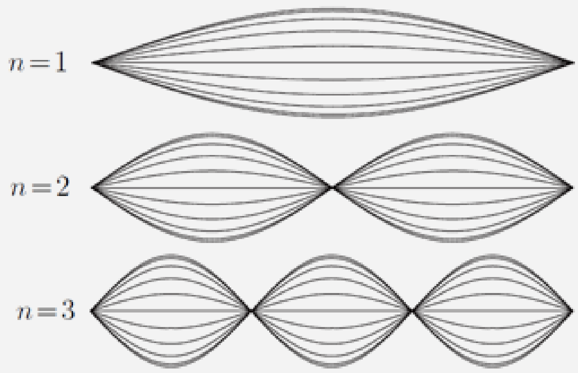
$$f_n = n\frac{c}{2L}$$

e) Un nœud de vibration est un point qui reste immobile : $\forall t, y(x,t) = 0$. Les nœuds se situent en x_n tel que $kx_n = n\pi$ où n est un entier positif. Deux nœuds sont donc distants de $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$.

Un ventre de vibration est un point pour lequel l'amplitude de vibration est maximale. Les ventres se situent en x'_m tel que $kx'_m = m\pi + \frac{\pi}{2}$ où m est un entier. Deux ventres sont donc également distants de $\frac{\lambda}{2}$.

Un nœud et un ventre consécutifs sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.

f) L'aspect de la corde pour les premiers modes propres est le suivant :



g) On utilise un ordinateur, une carte SYSAM et le logiciel latispro ; un microphone permet de faire l'acquisition du signal sonore produit lorsque l'on joue la corde que l'on veut étudier et de le traduire en un signal électrique ; on prend ensuite la FFT du signal pour obtenir les fréquences. Attention :

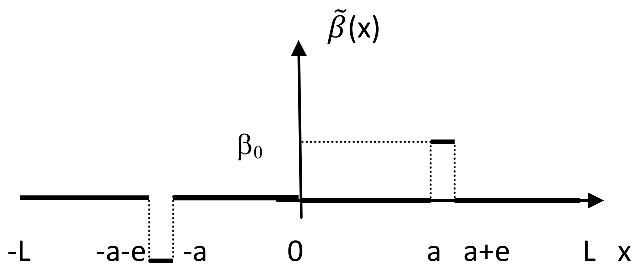
- Comme nous le verrons plus loin, il faut faire plusieurs acquisitions avec différents types d'excitations pour être sûr d'obtenir toutes les fréquences propres.
- D'autre part, on ne peut pas obtenir toutes les fréquences, puisqu'il y en a une infinité ! Seules seront obtenues celles qui sont inférieures à $f_{échantillonnage}/2$ et il faudra choisir $f_{échantillonnage}$ suffisamment grande pour éviter les repliements (ou utiliser un filtre antirepliement…).

h) Guitare : $L = 63$ cm. Piano : $L = 105$ cm.

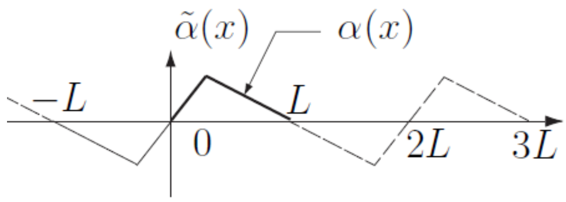
2. Solution générale

a)

- La courbe de gauche correspond à une corde que l'on pince en L/5 et que l'on déplace de h par rapport à sa position initiale en ce point.
  La courbe de droite correspond à une corde que l'on frappe (avec un marteau par exemple) entre a et a+e : la vitesse initiale est alors non nulle.
- Les fonctions $\tilde{\alpha}$(x) et $\tilde{\beta}$(x) correspondent aux prolongements par continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions α(x) et β(x) :
  La fonction $\tilde{\beta}$(x) a donc, sur une période 2L l'allure suivante :



De même pour la fonction $\tilde{\alpha}$(x) :



b) Les conditions initiales imposent :

$$y(x,0) = \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

a_n et b_n sont les coefficients du développement en série de Fourier des fonctions 2L-périodiques $\tilde{\alpha}$(x) et $\tilde{\beta}$(x).
On peut donc les calculer à partir des relations
$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} \tilde{\alpha}(x) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx$ et $b_n = \frac{1}{n\pi c}\int_{-L}^{+L} \tilde{\beta}(x) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx$

3. Corde pincée

- Les coefficients b_n sont nuls puisque la vitesse initiale est nulle.

- On détermine sur les spectres $c_3/c_1 = 1/9$ et $c_5/c_1 = 1/25$, la décroissance est donc en $1/n^2$ avec n impair : en effet la courbe $\tilde{\alpha}$(x) est celle d'un signal triangulaire périodique symétrique impair.

- On voit disparaitre certains harmoniques (5 notamment) et on voit apparaitre des harmoniques pairs (2, 4, 6, 8 notamment) ; avec f = 147 Hz, on ajoute 294, 588, 882 ,1176 Hz toutes audibles et on retire seulement 735 Hz. Le son est donc plus riche.

4. Corde frappée

a) Les coefficients a_n sont nuls puisque la corde est horizontale au moment où elle est frappée.
b) Le son du clavecin est moins riche puisque les amplitudes décroissent plus vite : on entend plus le fondamental que pour le piano (taux d'harmonique plus faible).

5. Limites

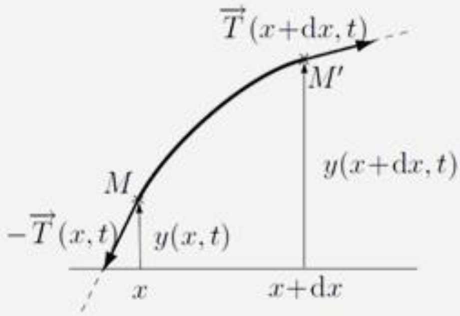
- Dissipation énergétique (frottements de l'air par exemple)
- Raideur (voir E.)
- Couplage des cordes avec le reste de l'instrument (chevalet, table d'harmonie, etc.)

C. Étude énergétique

1. a) L'énergie cinétique de la portion de corde $\{x, x + \mathrm{d}x\}$ est $\mathrm{d}e_c = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}mv^2(x,t)$, avec $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}\ell = \mu \mathrm{d}x$ à l'ordre 1. La densité linéique d'énergie cinétique de la corde est donc :

$$e_c = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2.$$

b)



i) La puissance des forces extérieures s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{ext}} &= T_y(x+\mathrm{d}x,t)v(x+\mathrm{d}x,t) - T_y(x,t)v(x,t)\\ &= \frac{\partial(T_y v)}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5}$$

où T_y est la projection de la tension sur $\overrightarrow{e_y}$.

ii) Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'élément de corde $\{x, x+\mathrm{d}x\}$ s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta E_c)}{\partial t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Or $\delta E_c = e_c(x,t)\mathrm{d}x$ donc :

$$\frac{\partial(\delta E_c)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu v^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

On déduit des équations (6) et (5) l'expression de la puissance des forces intérieures :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{int}} &= \frac{\partial(\delta E_c)}{\partial t} - \mathcal{P}_{\text{ext}}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu v^2\right)\mathrm{d}x - \frac{\partial(T_y v)}{\partial x}\mathrm{d}x\\ &= \left(\mu v\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial T_y}{\partial x} - T_y\frac{\partial v}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, compte tenu de la projection du théorème de la résultante cinétique sur l'axe Oy, les deux premiers termes de cette équation s'annulent. Il reste :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -T_y\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x = -T_y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}x = -T_y\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{T_0}T_y\frac{\partial T_y}{\partial t}\mathrm{d}x = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2T_0}T_y^2\right)\mathrm{d}x$$

iii) La puissance des efforts intérieurs se met sous la forme : $\mathcal{P}_{\text{int}} = -\dfrac{\partial(\delta E_P)}{\partial t}$. La densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P = \frac{1}{2T_0}T_y^2 = \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2.$$

2. **a)** L'énergie totale de la corde est :

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 (x,t) + \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 (x,t) \right) \, \mathrm{d}x$$

Dans le mode propre n, $y_n(x,t) = c_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)\sin(k_n x)$. L'énergie E_n de la corde est donc :

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \int_0^L \left(\frac{1}{2}\mu c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n)\sin^2(k_n x) + \frac{1}{2}T_0 c_n^2 k_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)\cos^2(k_n x) \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{L}{4}\mu c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) + \frac{L}{4}T_0 c_n^2 k_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \end{aligned}$$

Or $\mu\omega_n^2 = T_0 k_n^2$, donc :

$$E_n(t) = \frac{L}{2}c_n^2 T_0 k_n^2 = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L} T_0$$

b) Il suffit d'écrire l'énergie de la corde sous forme d'une intégrale sur x et de permuter l'intégrale sur x et la somme sur n. En utilisant l'orthogonalité des polynômes trigonométriques, on obtient :

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

L'énergie de la corde est la somme des énergies de chaque mode propre. Il n'y a pas de "couplage" entre les différents modes propres.

3. Pour une corde pincée $E_n = \dfrac{c_1^2}{n^2}\dfrac{\pi^2 T_0}{4L}$.

Pour une corde frappée $E_n = c_1'^2 \dfrac{\pi^2 T_0}{4L}$.

Pour un instrument à cordes frappées, l'énergie du mode n ne dépend pas de n, tous les harmoniques participent à l'énergie de la même façon ce qui explique en partie la richesse du son d'un piano. Pour un instrument à cordes pincée, l'énergie des harmoniques décroît en $\dfrac{1}{n^2}$: le son est plus pur, plus "cristallin".

D. Prise en compte de la raideur de la corde

1. Soit un échantillon de solide de longueur L et de section S. Quand on exerce la force $\overrightarrow{F}$ dans le sens de la longueur de l'échantillon, celui-ci s'allonge de Δl, l'allongement relatif $\dfrac{\Delta l}{L}$ étant proportionnel à la force surfacique $\dfrac{F}{S}$ tant que l'on reste dans le domaine d'élasticité du solide. Le coefficient de proportionnalité est l'inverse du module d'Young :

$$\frac{\Delta l}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}. \qquad (8)$$

Le module d'Young est homogène à une pression. Il s'exprime donc en pascals ou en newtons par mètres carrés.

2. **a)** E s'exprime en N.m^{-2}, S en m^2, K en m et $\partial^2 y/\partial x^2$ en m^{-1}, donc le membre de droite de l'égalité s'exprime en N.m^{-1}. Il est bien homogène à un moment de force.

b) Le théorème de la résultante cinétique pour la tranche $\{x, x+\mathrm{d}x\}$ s'écrit (au premier ordre, sa masse est $\mu \mathrm{d}x$) :

$$\mu \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T}(x+\mathrm{d}x, t) - \overrightarrow{T}(x,t)$$

En projection sur Ox :

$$0 = T_x(x+\mathrm{d}x,t) - T_x(x,t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$$

donc $T_x(x,t)$ ne dépend que de x. On prend : $T_x(x,t) = T_0$.

En projection sur Oy :

$$\mu \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_y(x+\mathrm{d}x,t) - T_y(x,t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

c) Soit M et M' les extrémités du segment étudié et G son centre de masse. Le théorème du moment cinétique en G pour cette portion de corde s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}(G)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{GM'} \wedge \overrightarrow{T}(x+\mathrm{d}x,t) - \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{T}(x,t) + \Gamma_z(x+\mathrm{d}x,t)\overrightarrow{e_z} - \Gamma_z(x,t)\overrightarrow{e_z}$$

Or $L(G)$ est proportionnel au moment d'inertie du segment de corde. Celui-ci est proportionnel à $\mathrm{d}m$ et à $(\mathrm{d}x)^2$. Il est du troisième ordre en $\mathrm{d}x$. On le néglige.

Sachant que $\overrightarrow{GM} = -\frac{\mathrm{d}x}{2}\overrightarrow{e_x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{GM'} = \frac{\mathrm{d}x}{2}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\overrightarrow{e_y}$, on obtient, au premier ordre en $\mathrm{d}x$:

$$T_y(x,t)\mathrm{d}x - T_0\frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial x}\mathrm{d}x = 0$$

En remplaçant Γ_z par son expression, on obtient :

$$T_y - T_0\frac{\partial y}{\partial x} + ESK^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

d) En éliminant T_y entre les deux équations précédentes, on obtient l'équation de propagation :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ESK^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

3. Modification des fréquences propres

a) En remplaçant $y(x,t)$ par la forme donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu}k^2 + \frac{ESK^2}{\mu}k^4$$

b) i) Les conditions aux limites sont les mêmes. Les Normes des vecteurs d'onde vérifient comme pour la corde sans raideur : $k_nL = n\pi$ où n et un entier positif. On reporte dans l'équation obtenue précédemment et on obtient (avec $(T_0/\mu)c^2 = 1$)

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}\left(1 + \frac{ESK^2}{T_0}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^{1/2}$$

ou encore :

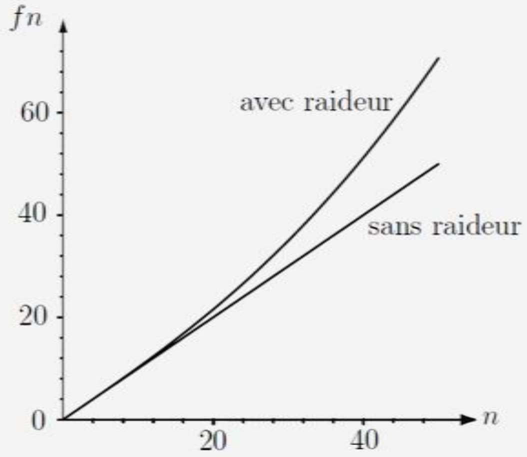
$$f_n = \frac{nc}{2L}\left(1 + \frac{ESK^2}{T_0}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^{1/2}$$

C'est bien l'expression demandée en posant :

$$B = \frac{ESK^2}{T_0}\frac{\pi^2}{L^2}$$

Les fréquences propres de la corde avec raideur ne sont plus multiples d'une fréquence fondamentale : le son n'est pas harmonique.

ii)



iii) On cherche n solution de $\sqrt{1+Bn^2} = \sqrt[12]{2}$, ce qui donne : $n = 18$.