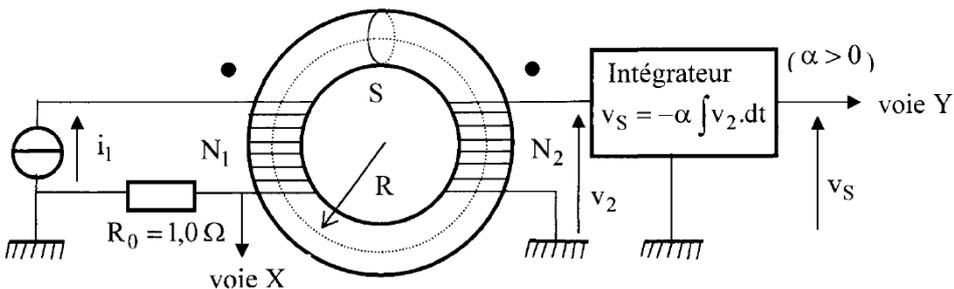


I. PREMIERE PARTIE (CCP PSI 2009 - extrait)

A. Etude expérimentale d'un matériau ferromagnétique

On désire tracer expérimentalement le cycle d'Hystérésis $B = f(H)$ d'un matériau se présentant sous la forme d'un tore sur lequel sont bobinés deux enroulements. On note R son rayon moyen et S sa section.

Le schéma de principe du montage expérimental est le suivant :

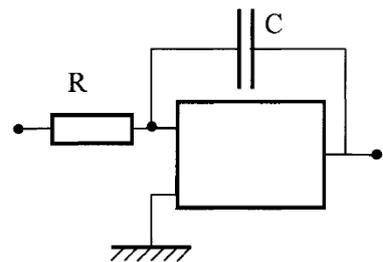


Dans les conditions expérimentales, $N_2.i_2 \ll N_1.i_1$. On ne tiendra pas compte de la résistance des enroulements. H et B sont supposés uniformes dans le tore.

Compte tenu qu'on peut inverser (en appuyant sur la touche « invert ») une des deux voies de l'oscilloscope, on n'attachera pas trop d'importance aux signes des coefficients de proportionnalité K_1 et K_2 dans les deux questions suivantes.

- 1) La relation entre i_1 et H est du type $H = K_1.i_1$. Etablir l'expression de K_1 en fonction de N_1 et R .
- 2) a) Rappeler la relation entre le flux ϕ_{CM} à travers une section droite du circuit magnétique et la tension induite v_2 dans la bobine 2. La relation entre v_S et B est du type $B = K_2.v_S$. En déduire l'expression de K_2 en fonction de α , N_2 et S . On admettra que $v_S = 0$, lorsque $B = 0$.

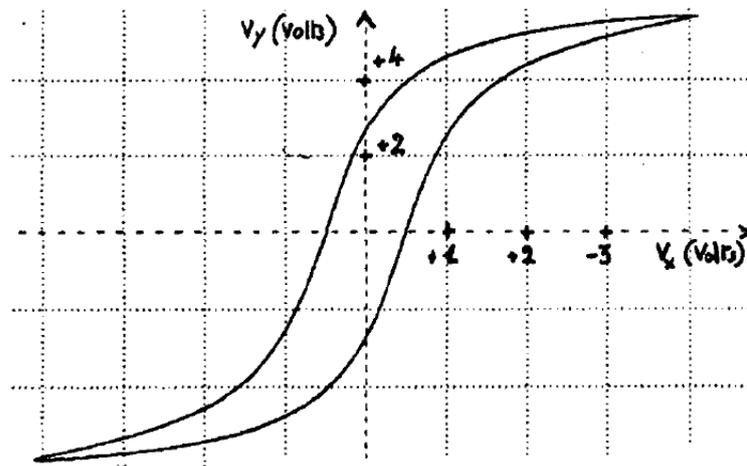
b) On utilise le montage ci-contre pour réaliser l'intégrateur. Quelles doivent être les bornes d'entrée + et - de l'amplificateur opérationnel pour un fonctionnement en mode linéaire ? Etablir alors l'expression de α en fonction de R et de C .



- 3) Les composants donnent $K_1 = 100 S.I.$ et $K_2 = 0,20 S.I.$.

On observe sur l'écran de l'oscilloscope la courbe ci-dessous.

En déduire l'ordre de grandeur du champ magnétique rémanent B_r , de sa valeur à saturation B_{sat} et de l'excitation coercitive H_c dont on précisera les unités !



4) La ferrite présente un cycle de surface inférieure à celle du fer ainsi qu'un champ rémanent plus faible.

Quel est parmi ces deux matériaux celui qui est le mieux adapté à la réalisation :

- * d'un transformateur ?
- * d'un aimant permanent ?

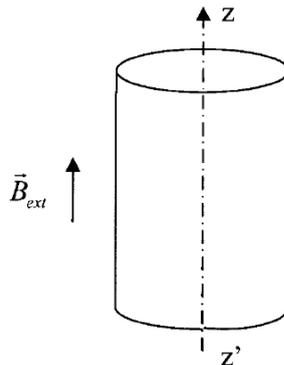
5) Sur l'oscillogramme, on évalue l'aire A du cycle à 6 carreaux. Rappeler sous forme d'une intégrale, l'expression de la densité volumique d'énergie dissipée dans le matériau au cours d'un cycle. L'évaluer numériquement dans le cas du cycle étudié ci-dessus.

B. Influence des courants de Foucault sur le cycle d'hystérésis

On considère un conducteur ohmique, cylindrique de très grande hauteur h (i.e. supposé infini) suivant l'axe $z'z$. Il est amagnétique, c'est-à-dire assimilable d'un point de vue magnétique à du vide de perméabilité μ_0 .

Ce conducteur est placé dans une région où règne un champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} uniforme avec $\vec{B}_{ext} = B_{max} \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Celui-ci provient d'une excitation extérieure $\vec{H}_{ext} = H_{max} \cos(\omega t) \vec{e}_z$.

On note ρ son rayon et γ sa conductivité électrique.



1) L'air est assimilé à du vide. Rappeler la relation qui existe entre \vec{B}_{ext} et \vec{H}_{ext} .

3) Expliquer pourquoi, il apparaît dans ce conducteur ohmique un champ électrique induit \vec{E} ainsi que des courants induits de densité volumique \vec{j}_v .

4) Quelle relation existe-t-il entre une densité volumique de courant \vec{j}_v et son courant I ? Quelle est l'unité de \vec{j}_v ?

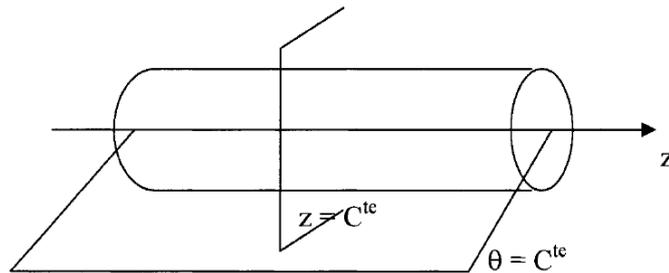
5) En se plaçant dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, déterminer les expressions de \vec{E} et \vec{j}_v en fonction de B_{\max} , r , γ , ω et t .

6) Rappeler l'expression de la densité volumique locale des pertes Joule instantanées, puis établir sa valeur locale moyenne sur le temps en fonction de B_{\max} , r , γ et ω .

7) A l'aide d'une intégration sur le conducteur de rayon ρ et de hauteur h , donner l'expression de la densité volumique des pertes Joules moyennes sur le temps et sur l'espace.

8) Dessiner l'allure des lignes de courants induits à l'intérieur du conducteur étudié précédemment. Les pertes à l'intérieur de ce conducteur sont elles modifiées :

- si on découpe le conducteur suivant un plan d'équation $\theta = \text{constante}$?
- si on découpe le conducteur suivant un plan d'équation $z = \text{constante}$?



9) Pourquoi feuillette-t-on les circuits magnétiques des transformateurs électriques ? Pourquoi ajoute-t-on du silicium (peu conducteur) au fer de ces circuits magnétiques ?

10) La densité de courant \vec{j}_v crée à l'intérieur du conducteur un champ magnétique \vec{B}' avec $\vec{B}'(r) = \frac{\mu_0 \gamma B_{\max} \omega (\rho^2 - r^2)}{4} \sin(\omega t) \vec{e}_z$ pour tout $r < \rho$ et $\vec{B}'(r) = \vec{0}$ pour tout $r > \rho$.

En assimilant l'induction magnétique \vec{B} à l'intérieur du conducteur aux deux contributions \vec{B}_{ext} et \vec{B}' soit $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}'$, déterminer en fonction de B_{\max} , ρ , ω , t et γ , le flux $\phi(t)$ de \vec{B} à travers un disque de rayon ρ et d'axe $z'z$.

11) On définit le champ magnétique moyen dans le conducteur par $\langle \vec{B}(t) \rangle = \frac{\phi(t)}{\pi \rho^2} \vec{e}_z$. Déterminer $\langle \vec{B}(t) \rangle$ en fonction de B_{\max} , μ_0 , γ , ω , ρ et t .

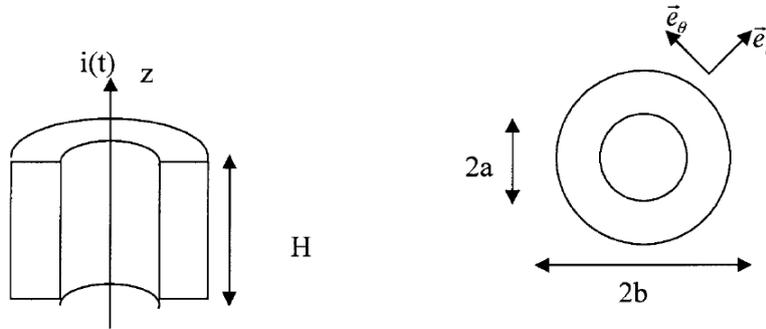
12) On rappelle qu'à une grandeur sinusoïdale réelle $x(t) = X_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$, on peut lui associer la grandeur complexe $\underline{x}(t) = \underline{X}_{\max} e^{j\omega t}$ où \underline{X}_{\max} est le complexe de module X_{\max} et d'argument φ .

Montrer qu'on peut définir une perméabilité complexe $\underline{\mu}$ telle que $\langle \vec{B}(t) \rangle = \underline{\mu} \vec{H}_{ext}(t)$. On précisera le module et l'argument de $\underline{\mu}$ en fonction de μ_0 , γ , ω et ρ .

13) Quelle est alors l'allure des cycles d'hystérésis des matériaux ferromagnétiques en haute fréquence, lorsque les courants de Foucault sont importants ?

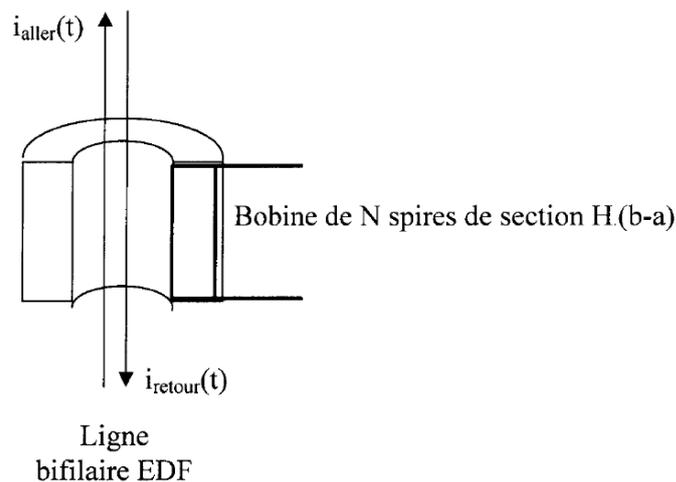
C. Utilisation des matériaux ferromagnétiques

On considère le dispositif suivant qui comporte un circuit magnétique torique et un conducteur rectiligne supposé infini, parcouru par un courant $i(t)$, placé sur l'axe de révolution du tore. Le tore est à section rectangulaire de hauteur H , les côtés sont distants de a et b de l'axe de révolution ; a et b sont donc les rayons intérieur et extérieur du tore. On a $b=2a$ et $H=1\text{cm}$. Le matériau magnétique constituant le tore est supposé homogène, linéaire, de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 10^6$. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$.



- 1) En justifiant soigneusement votre réponse, montrer qu'à l'intérieur du tore le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$;
- 2) Exprimer ce champ $B(r, z)$;
- 3) En déduire l'expression du flux ϕ à travers une section droite du circuit magnétique.

Un disjoncteur différentiel se compose de deux circuits électriques couplés par le circuit magnétique précédent. La ligne électrique bifilaire EDF (230 V_{eff}, 50 Hz qui assure le transport aller et retour du courant) est placée au centre du circuit magnétique précédent. Une autre bobine, assimilable à un circuit ouvert, comporte N spires enroulées autour du circuit magnétique.

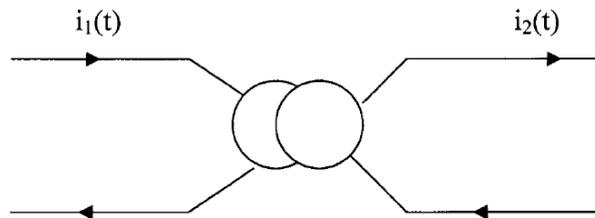


- 4) Un usager touche accidentellement un seul des deux fils de la ligne centrale bifilaire, par exemple le conducteur aller, en même temps que ses pieds sont reliés à la terre. Il y a alors un courant de fuite : tout le courant véhiculé par le conducteur aller ne repart pas par le conducteur retour. Pour qu'il n'y ait pas d'accident grave, l'intensité efficace du courant qui traverse l'utilisateur doit être inférieure à 30 mA_{eff}. Expliquer en quoi ce dispositif permet-il de détecter une électrocution ?

5) La bobine précédente alimente un électroaimant qui coupe l'alimentation EDF sur seuil de tension : $V_{\text{seuil}} = 5 V_{\text{eff}}$. Combien doit-elle comporter de spires pour une protection de $30 \text{ mA}_{\text{eff}}$ (courant maximal admissible dans le corps de l'utilisateur !) ?

6) En pratique, les matériaux magnétiques ne sont généralement pas linéaires, mais présentent un cycle d'hystérésis $B(H)$. Pourquoi les constructeurs de disjoncteurs différentiels recherchent-ils des matériaux magnétiques doux tel que $\left| \frac{dB}{dH} \right|$ en $H = 0$, soit maximum ?

Dans certains pays, on impose que certaines installations électriques (salles de bains, piscines...) soient alimentées via un transformateur de rapport $m = 1$.



7) Y a-t-il un risque d'électrocution si on touche accidentellement un seul des deux conducteurs du secondaire du transformateur. En quoi un transformateur constitue-t-il un élément de protection des personnes ? Quelles sont ses limites ?

D. Protection des lignes électriques domestiques

On considère un conducteur métallique de grande longueur L , de section circulaire de rayon R , de masse volumique μ , de capacité calorifique massique c . On notera γ sa conductivité électrique et λ sa conductivité thermique. Toutes ces grandeurs sont uniformes dans le conducteur et considérées indépendantes de la température.

Ce conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité I , dont la densité de courant \vec{j}_e est supposée uniforme. On se place en régime permanent et on néglige les effets de bords. On admettra qu'entre le fil et l'air ambiant, dont la température vaut T_0 , il s'établit des échanges thermiques superficiels définis par la loi de Newton : $d\phi = h[T(R) - T_0] dS$. La puissance thermique récupérée par le milieu extérieur est proportionnelle à la surface du conducteur et à la différence de température entre l'air et la périphérie du conducteur.

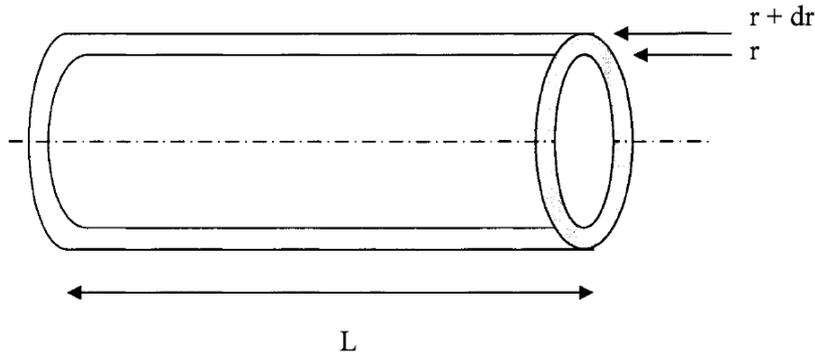
1) Les phénomènes de conduction thermique et électrique sont décrits par deux lois phénoménologiques : lesquelles ? Préciser les unités des grandeurs qui interviennent.

2) Du fait des symétries, de quelle(s) variable(s) dépend la température et que peut-on dire du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q ?

3) La conduction électrique est responsable d'une dissipation d'énergie par effet Joule dans le conducteur. Rappeler, en faisant intervenir j_e et une caractéristique du milieu, l'expression de la densité volumique de puissance dissipée, notée p_J .

4) Donner l'expression du flux thermique $\phi_{th}(r)$ traversant le cylindre de rayon $r < R$ et de longueur L .

Dans les questions 5 et 6, on se propose de déterminer l'équation différentielle qui régit la variation radiale de température en régime permanent. On considère comme système la portion de conducteur comprise entre r et $r + dr$ et de longueur L .



5) On note dP_{th} la puissance thermique élémentaire dissipée par effet Joule dans notre système. A l'aide de la question 3, exprimer dP_{th} en fonction de j_e et des caractéristiques géométriques du système.

6) Relier $\phi_{th}(r)$, $\phi_{th}(r + dr)$ et dP_{th} . Puis en déduire l'équation différentielle qui régit la variation de température.

7) Déterminer l'expression de $T(r)$ en fonction de la condition aux limites $T(R)$ encore inconnue.

On remarquera que $r \frac{dT}{dr}$ est nul en $r = 0$ ou que $T(0)$ reste finie.

8) En écrivant la conservation de la puissance en R, déterminer $T(R)$ en fonction de I , γ , h et des caractéristiques géométriques du conducteur. On rappelle que $I = j_e \pi R^2$.

9) On donne les températures de fusion du plomb et du cuivre : $T_{fus}(Pb) = 327 \text{ °C}$ et $T_{fus}(Cu) = 1085 \text{ °C}$, ainsi que les conductivités électriques $\gamma(Pb) = 4,8 \cdot 10^6 \text{ S.I.}$ et $\gamma(Cu) = 59,6 \cdot 10^6 \text{ S.I.}$. On supposera que $T_0 = 300 \text{ K}$ (ou 27 °C) et $h = 1,3 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Que pensez-vous d'un conducteur de plomb de rayon $R = 0,25 \text{ mm}$, parcouru par un courant de 1 A ?

Les anciens fusibles étaient des fils de plomb non gainés. Sur quel(s) paramètre(s) jouait-on pour qu'ils servent de limiteur de courant à usage unique ?

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(a_z)}{\partial z} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

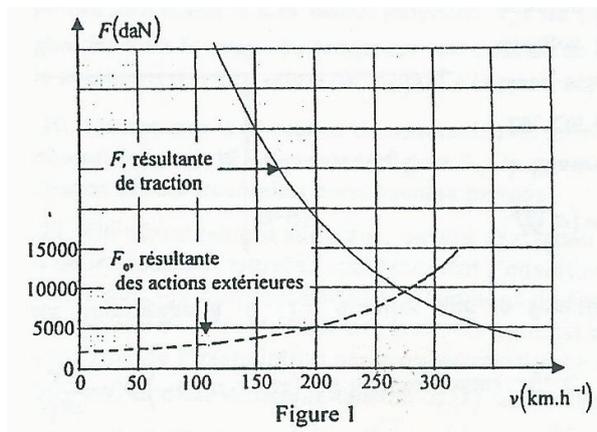
PARTIE II : Moteur synchrone autopiloté (adapté de Mines-Ponts PSI)

La plupart des locomotives utilisent la traction électrique. Parmi les procédés utilisés figurent les chaînes de traction à moteur synchrone autopiloté étudiée dans ce problème.

Préliminaires : ordres de grandeur

La masse d'une rame du TGV Atlantique (deux motrices et dix voitures remorques) est $m = 700$ tonnes.

La figure 1 représente les courbes donnant les variations en fonction de la vitesse v de la résultante F_e des actions extérieures s'exerçant sur la rame (tracée en pointillés) d'une part et de la résultante F des actions exercées par l'ensemble des moteurs (tracée en traits pleins) d'autre part. On rappelle que $1 \text{ daN} = 10 \text{ N}$.



1. La résultante extérieure se modélise par $F_e = A + Bv + Cv^2$ où (A, B, C) sont trois constantes. Proposer une interprétation physique pour chacun des termes de cette loi.
2. Déterminer graphiquement la vitesse de la rame ainsi que la résultante de traction en régime permanent. Discuter la stabilité de ce régime.
3. Déterminer numériquement, pour ce régime, la puissance développée par l'ensemble des moteurs.
4. En envisageant le cas où cette traction est assurée par huit moteurs à courant continu, alimentés par une tension de ligne de 1500 V, estimer l'ordre de grandeur du courant circulant dans le rotor.
5. Quel problème peut alors poser ce type de dispositif ?

La suite du problème s'intéresse au moteur synchrone.

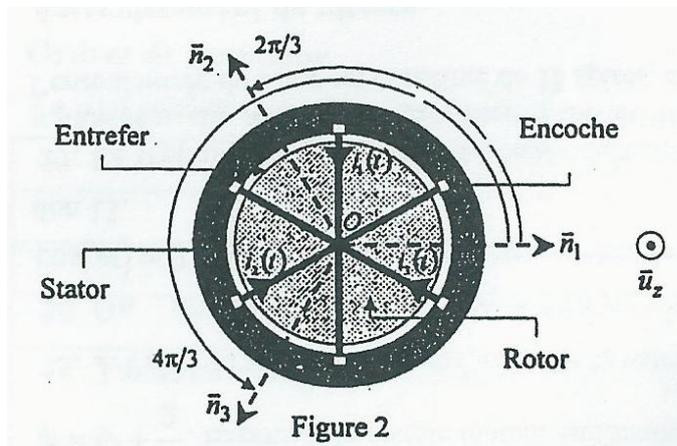
Question préliminaire : Rappeler en quelques phrases, de manière précise et concise, le principe de fonctionnement d'un tel moteur.

A. Étude du stator

Le stator porte trois bobinages (phases) identiques. Chacun d'eux est assimilé à une spire plate parcourue par le courant $i_k(t)$ avec $k \in \{1, 2, 3\}$ (figure 2).

L'alimentation (triphasee) est caractérisée par les courants :

$$i_1(t) = i_{sm} \cos(\omega t) \quad ; \quad i_2(t) = i_{sm} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad ; \quad i_3(t) = i_{sm} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$



Les parties des spires parallèles à l'axe (O, z) , positionnées dans des encoches situées à l'intérieur du stator, se referment en formant des cadres rectangulaires.

On note \vec{n}_k la normale au cadre et $i_k(t)$ le courant algébrique (orientation sur la figure) associés à la spire k .

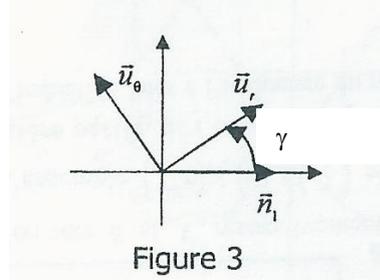
Le stator et le rotor, tous deux réalisés dans un matériau magnétique, sont séparés par une zone d'air, d'épaisseur e , nommée entrefer. La faible valeur de e permet de confondre le rayon intérieur du stator et le rayon extérieur du rotor, notés R l'un et l'autre.

Les effets de bord suivant la direction (O, z) sont négligés (invariance par translation dans cette direction). Le matériau magnétique est linéaire, de perméabilité magnétique relative μ_r infinie.

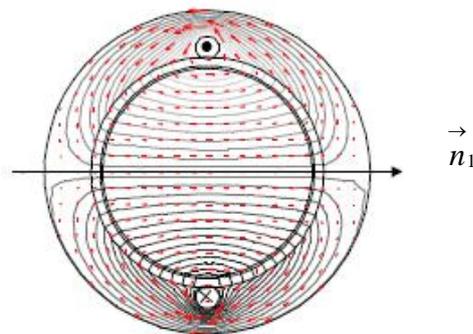
6. En se souvenant que la composante tangentielle de \vec{H} est continue, justifier que le champ magnétique \vec{B} est radial dans l'entrefer.

L'espace est rapporté au repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\gamma, \vec{u}_z)$ défini sur la figure 3. Les angles sont repérés à partir du vecteur \vec{n}_1 . On désigne par $\vec{B}_s = B_s(\gamma, t)\vec{u}_r$ le champ statorique dans l'entrefer. Sa variation en fonction de r sur l'épaisseur e de l'entrefer est négligée.

7. Énoncer le théorème d'Ampère dans un milieu magnétique.



On a représenté ci-contre quelques lignes du champ magnétique créé par la seule spire 1 parcourue par le courant $i_1(t)$:



Dans l'entrefer, $\vec{B}_1 = B_1(\gamma, t)\vec{u}_r = f_1(\gamma)i_1(t)\vec{u}_r$.

8. En exploitant les symétries du champ magnétique de cette carte de lignes de champ et en appliquant soigneusement le théorème d'Ampère, déterminer puis tracer $f_1(\gamma)$.

On rappelle le développement en série de Fourier d'un créneau pair de période $\frac{2\pi}{\Omega}$ variant entre -1 et 1 : $\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\cos \left[\frac{(2p+1)\Omega t}{2} \right]}{2p+1}$.

On admet dans toute la suite que f_1 est bien représentée par son seul premier harmonique.

9. Montrer que $B_1(\gamma, t) = k_s i_1(t) \cos(\gamma)$ où k_s est une constante à exprimer en fonction de μ_0 et e .
10. Donner l'expression de $B_2(\gamma, t)$ en fonction de k_s , γ et du courant $i_2(t)$. Faire de même pour $B_3(\gamma, t)$.
11. On travaille en notation complexe : On note $\underline{i}_k(t) = i_{sm} e^{j(\omega t - (k-1)2\pi/3)}$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.
- Exprimer les $\underline{B}_k(\gamma, t)$.
 - En déduire que le champ dans l'entrefer $\vec{B}_s = B_s(\gamma, t) \vec{u}_r$ s'écrit $\vec{B}_s = K_s i_{sm} \cos(\omega t - \gamma) \vec{u}_r$ où K_s est une constante à exprimer en fonction de k_s . Pourquoi ce champ est-il qualifié de champ glissant ?

B. Étude du rotor

Le bobinage porté par le rotor est modélisé par une spire rectangulaire de largeur $2R$ et de hauteur H , solidaire du rotor, parcourue par le courant constant I_r (figure 6). Sa position est repérée par l'angle θ entre \vec{n} , vecteur normal à la spire, et \vec{n}_1 (défini figure 2).

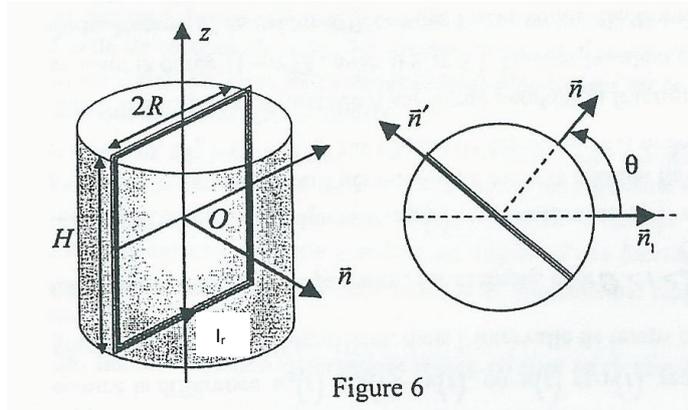


Figure 6

12. Le moment par rapport à l'axe (O, z) , $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$, vérifie $\Gamma = \Phi_0 i_{sm} \sin(\omega t - \theta)$, où Φ_0 est une constante. Quelle est l'unité de Φ_0 ? Montrer qu'en fait Φ_0 est homogène à un flux de champ magnétique.
13. Le rotor tourne à la vitesse angulaire ω_r et on note $\theta = \omega_r t - \varphi$. Pour quelle valeur de ω_r la moyenne temporelle de Γ est-elle non nulle ? On considère que ω_r garde cette valeur dans la suite du problème. Exprimer alors Γ . Dans quelle plage de valeurs de φ ce couple est-il moteur ?
14. Le moteur synchrone entraîne une charge dont le couple résistant est noté $-\Gamma_r$ (avec $\Gamma_r > 0$). Quelle est la valeur maximale Γ_{max} que peut prendre Γ_r en régime permanent ?
15. En supposant $0 < \Gamma_r < \Gamma_{max}$ et $0 < \varphi < 2\pi$, montrer qu'il existe deux points de fonctionnement possibles en régime permanent. Discuter leur stabilité.

C. Etude des f.e.m. induites et aspect énergétique (Partie assez difficile...)

16. Compte- tenu des hypothèses retenues dans ce problème, justifier que l'on puisse écrire les flux magnétiques à travers les bobinages sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & M_{1r} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} & M_{2r} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 & M_{3r} \\ M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ I_r \end{bmatrix} = [L][i]$$

On prendra soin de détailler la signification des différents termes des vecteurs ligne et colonne et de la matrice.

Compte-tenu des phénomènes étudiés et des caractéristiques géométriques du système, indiquer quelles propriétés possède cette matrice ? En déduire des relations entre certains des coefficients de celle-ci. Réécrire la matrice pour synthétiser ces résultats.

17. Ecrire le flux à travers la spire rotorique du champ magnétique \vec{B}_1 créé dans l'entrefer par le courant $i_1(t)$ de la phase 1.

Justifier que pour calculer ce flux on peut envisager le flux de \vec{B}_1 à travers un demi-cylindre de rayon R et de hauteur H s'appuyant sur la spire rotorique. En déduire l'expression $M_{r1}(\theta) = 2RHk_s \cos(\theta)$. En déduire M_{r2} et M_{r3} .

18. En adaptant le résultat précédent, donner sans calcul les expressions de L_1, M_{12} .

19. Réécrire la matrice $[L]$.

20. En notant que $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ à tout instant, écrire le flux total Φ_1 à travers la spire 1 sous la forme d'une combinaison linéaire des seuls courants i_1 et I_r . En déduire la force contre-électromotrice e_1' induite dans la phase 1 en fonction de k_s, R, I_r, H, ω_r et θ .

21. On écrira dorénavant $e_1' = \sqrt{2}E' \cos(\omega_r t - \Psi)$. Montrer que $\varphi = \Psi + \frac{\pi}{2}$.

22. Exprimer de même $e_2'(t)$ et $e_3'(t)$ en fonction de E' et $\omega_r t - \Psi$.

23. Calculer la puissance moyenne P reçue par les trois forces contre-électromotrices e_1', e_2' et e_3' en fonction de E', i_{sm} et Ψ .

24. En utilisant la relation de conversion électromécanique de puissance reliant Γ, ω_r et P calculé ci-dessus, relier E', Φ_0 et ω_r .

On admet que l'énergie magnétique est donnée par la formule $W_m = \frac{1}{2} [i]^T [L] [i]$.

On rappelle l'expression du moment subi par le rotor : $\Gamma = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_{i_1, i_2, i_3, I_r}$

25. Déterminer Γ en fonction des courants i_1, i_2, i_3 et I_r, R, H, k_s et θ ; Un calcul en complexes, similaire à celui de la question 11., permet de trouver : $\Gamma = 3I_r R H k_s i_{sm} \sin(\varphi)$.

Conclure.