I. PHENOMENES DE TRANSPORT DIFFUSIF (E3A PSI 2012 extrait)

CE PROBLEME EST A TRAITER AU CHOIX AVEC LE PROBLEME D'X-ENS

Ce choix est exclusif et définitif

PREMIERE PARTIE

DIFFUSION – LOI DE FICK

Au sein d'un milieu homogène, considérons un ensemble de particules dont la concentration n'est pas uniforme. Ces particules peuvent être des molécules, des atomes ou des ions, des défauts ponctuels, des électrons libres, etc … Dans l'hypothèse d'une diffusion unidirectionnelle, leur densité (ou concentration) particulaire n(x,t) dépend de leur position le long de la direction Ox.

En 1885, dans le cadre de ses travaux sur les mélanges de gaz et de liquides, Adolf Fick proposa la loi phénoménologique de diffusion. Cette loi introduit le coefficient de diffusion (ou diffusivité) D et relie le vecteur densité volumique de particules $\vec{j}_D$ au gradient de concentration particulaire n.

A1. Citer la loi physique sur laquelle Fick s'est appuyé pour élaborer sa théorie.

A2. Rappeler la loi de Fick ; expliquer le caractère « phénoménologique » de cette loi. Justifier l'existence d'un flux de particules et son orientation relative vis à vis du gradient de concentration.

La loi de Fick ne faisant apparaître que les variations spatiales de la concentration particulaire à un instant t, il convient de la compléter par une équation de bilan lorsque le flux de particules varie au cours du temps. Considérons un cylindre infiniment long, de section S constante, parallèle à la direction Ox de la diffusion.

A3. Effectuer un bilan de matière sur un volume élémentaire de section S et d'épaisseur dx pour établir une relation traduisant la conservation du nombre de particules. En déduire l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

A4. Par une analyse dimensionnelle, établir une relation qualitative exprimant la longueur caractéristique L du phénomène de diffusion en fonction de l'ordre de grandeur τ de sa durée et du coefficient de diffusion D.

A5. Réécrire l'équation de la diffusion dans le cas où le coefficient de diffusion varie avec la concentration de l'espèce diffusante. Proposer un mode de résolution de cette équation.

En réalité, l'écoulement des particules dans une direction donnée peut avoir deux origines : l'une est la conduction induite par le gradient de concentration, l'autre est la convection provoquée par l'action d'une force extérieure (dite force de transport) qui déplace les particules avec une vitesse moyenne v constante.

A6. En vous inspirant de la loi d'Ohm locale, exprimer simplement le vecteur densité volumique de particules $\vec{j}_T$ pour la seule convection en fonction de v et n(x,t). Compléter la loi de Fick pour obtenir une nouvelle équation de la diffusion dans le cas particulier où D et v sont indépendants de la densité de particules.

Pour illustrer la diffusion, considérons la situation expérimentale du dopage d'un semi-conducteur d'arséniure de gallium (AsGa) avec du silicium. A l'instant $t = 0$, N_0 atomes de silicium par unité de **surface** *sont brusquement introduits en $x = 0$, à la surface d'une plaquette d'AsGa considérée comme un milieu semi-infini. L'analyse du régime instationnaire montre que le nombre d'atomes de silicium N(x,t) par unité de volume à l'abscisse x et à l'instant t s'écrit :*

$$N(x,t) = \frac{K}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right).$$

A7. Etablir la relation entre a et D, pour que la répartition d'atomes N(x,t) soit solution de l'équation de diffusion établie en A3. Traduire la conservation du nombre d'atomes introduits et, par le changement de variable $u = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$ se référant aux compléments mathématiques en fin d'épreuve, déterminer la valeur de K en fonction de N_0 et D.

Le schéma ci-dessous (Figure 1) traduit le résultat du dopage de la plaquette d'AsGa : l'évolution de la distribution des atomes de silicium est tracée en fonction de l'abscisse x, à différents instants.

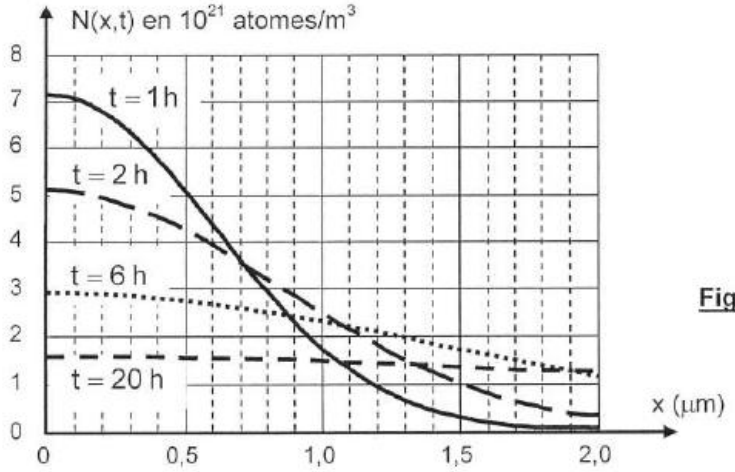


Figure 1

A8. Analyser la forme des courbes obtenues. Que vaut l'aire sous chacune de ces courbes ? Déterminer, à un instant t donné (en adoptant par exemple $t = 1\,h$), la profondeur d'implantation L des atomes de silicium correspondant à une concentration moitié de la concentration injectée en $x = 0$ (il s'agit de la demi-largeur à mi-hauteur).

A9. Proposer un mode de détermination du coefficient de diffusion D du silicium dans AsGa. Estimer l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion D.

DEUXIEME PARTIE

DIFFUSION DES MOLECULES D'UN COLORANT ENTRE DEUX SOLUTIONS

Etudions la diffusion de molécules de colorant entre deux solutions aqueuses qui, à l'instant initial, ne possèdent pas la même concentration volumique. Une cuve d'épaisseur d et de grandes dimensions dans les deux autres orientations, est constituée de deux bacs de même volume remplis d'une solution contenant des molécules d'un même colorant et séparés par une mince cloison située en $z = 0$. De part et d'autre de ce plan de séparation, les concentrations sont uniformes et valent respectivement C_1 pour $z < 0$ et $C_2 < C_1$ pour $z > 0$. (Figure 2)

A l'instant $t = 0$, la cloison est brusquement retirée et les molécules diffusent, conduisant à une concentration C(z,t) en un point de cote z et à l'instant t. Très loin du plan $z = 0$, et pour des temps élevés, les concentrations conservent leurs valeurs initiales :

$$C(-\infty,t) = C_1 \text{ et } C(+\infty,t) = C_2 .$$

L'équation de la diffusion, étudiée dans la partie précédente, admet ici pour solution la ***fonction d'erreur*** *(détaillée en fin de problème) :* $erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u exp(-s^2)\, ds$, *avec* $u = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$.

D est le coefficient de diffusion des molécules de colorant dans la solution ; il est supposé indépendant de la concentration.

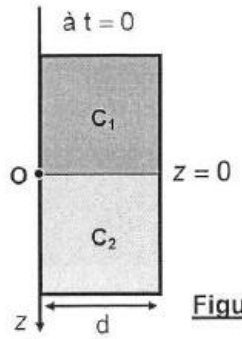


Figure 2

Tournez la page S.V.P.

B1. Comparer la variation d'énergie potentielle d'une molécule de colorant, de masse molaire M_C, lors de son déplacement dans le champ de la pesanteur de l'ordre de la hauteur h de la cuve, à l'énergie d'agitation thermique k_BT de cette molécule.
En tirer la conclusion utile pour la suite du problème, en utilisant les données suivantes : $M_C = 100\ g.mol^{-1}$, $h = 10\ cm$, $g \cong 10\ m.s^{-2}$, $\mathcal{N}_A = 6.10^{23}\ mol^{-1}$, $k_B = 1{,}33.10^{-23}\ J.K^{-1}$ et $T = 300\ K$.

B2. Présumer, sans effectuer de calcul, de la concentration attendue à l'interface des deux bacs, lorsque le phénomène de diffusion est achevé.

Par continuité en $z = 0$, la concentration dans chaque domaine peut être décrite par une expression du type $C(z,t) = A\ erf(u) + B$, A et B étant des constantes.

B3. Déterminer les constantes A et B à partir des conditions aux limites, puis écrire la loi de répartition de concentration $C(z,t)$.

B4. Tracer l'allure du profil de concentration $C(z,t)$ à trois instants successifs : $t = 0$, t_1 puis $t_2 > t_1$. Commenter ces tracés.

LES QUESTIONS B.5 à B.10. NE SONT PAS A TRAITER EN DS

Les réponses à ces questions se trouvent dans le corrigé fourni en fin d'épreuve

Détermination expérimentale du coefficient de diffusion

L'indice de réfraction n d'une solution est, en première approximation, une fonction affine de la concentration du colorant en solution et peut s'écrire : $n(z,t) = n_0 + K\ C(z,t)$, n_0 et K étant des constantes positives.

B5. Exprimer la constante K en fonction des indices n_1, n_2 et des concentrations C_1, C_2 des deux solutions, sachant qu'à la limite $n(C = C_1) = n_1$ et $n(C = C_2) = n_2$.

B6. Déterminer le gradient d'indice $\overrightarrow{grad}\, n$ associé aux variations de l'indice n dans la cuve, puis sa composante sur l'axe Oz en fonction de n_1, n_2, D, z et t. En quelle position cette composante est-elle maximale ? Donner sa valeur correspondante.

B7. Représenter l'allure de cette fonction à trois instants successifs : $t = 0$, t_1 puis $t_2 > t_1$. Commenter ces tracés.

Un faisceau laser est élargi grâce à une lentille cylindrique inclinée à 45° par rapport à la verticale pour former une nappe laser allongée (Figure 3a). Ces rayons lumineux sont envoyés perpendiculairement à une face de la cuve de façon que différentes hauteurs dans la solution soient traversées par les rayons le long d'une diagonale de la face d'entrée. Cette diagonale est inclinée à 45° par rapport au plan horizontal.

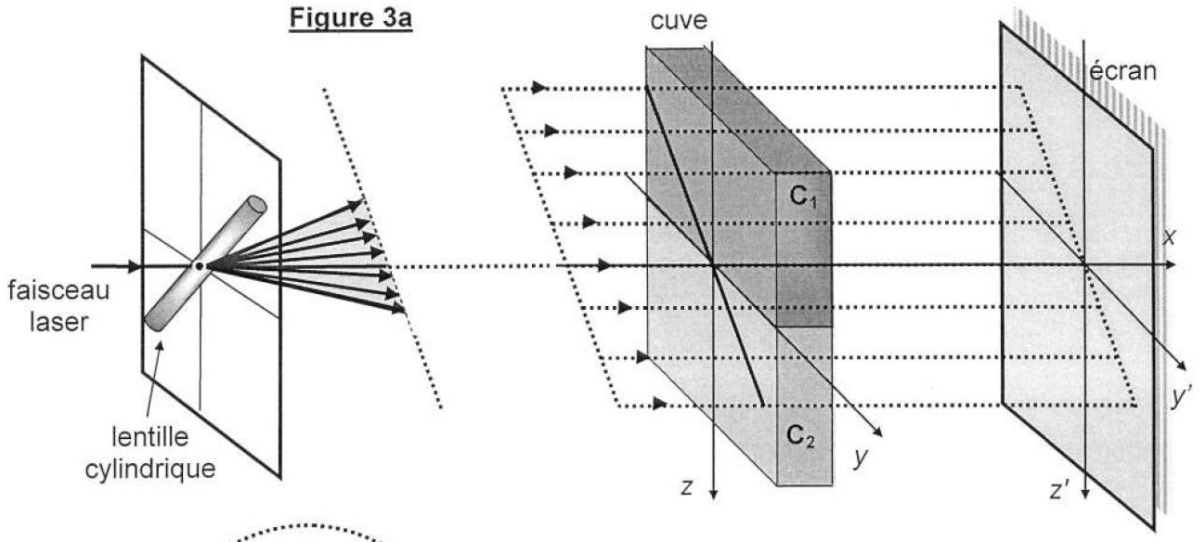
Un écran, parallèle à la cuve, récupère les impacts des rayons après traversée de la cuve. Selon l'optique des milieux inhomogènes, les rayons lumineux sont déviés dans la cuve et suivent une trajectoire courbe, le rayon de courbure R s'exprimant comme :

$$\frac{1}{R} \cong \frac{1}{n}\frac{\partial n(z,t)}{\partial z}.$$

Lors de sa traversée dans la solution (Figure 3b), le rayon lumineux est donc dévié d'un angle α tel que :

$$\alpha \approx \tan\alpha \approx d/R.$$

Figure 3a



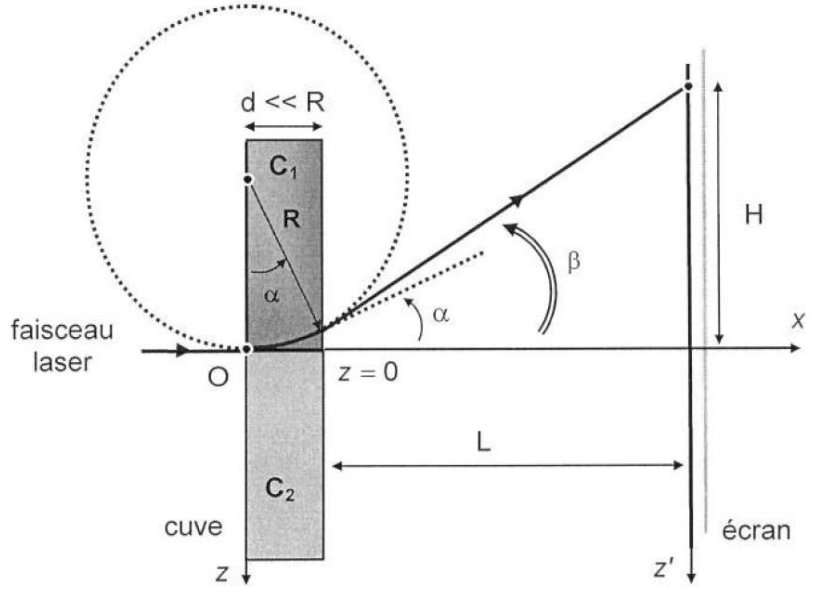


Figure 3b

B8. Préciser pour quelle valeur de z se réalise la déviation maximale du rayon lumineux sur l'écran.

Le rayon lumineux subit une déviation à la traversée de la paroi de sortie de la cuve dont l'épaisseur en verre est négligeable. Le rayon émerge de la cuve pour passer dans l'air (d'indice optique $n_a = 1$) avec un angle de réfraction β.

B9. Réaliser un schéma illustrant la trajectoire du rayon lumineux à la traversée de la paroi de la cuve en verre d'épaisseur supposée nulle ; faire apparaître les angles α et β, puis évaluer l'angle β en sortie de cuve.

En déduire la déflexion verticale globale H du rayon en fonction de d, L et $\dfrac{\partial n(z,t)}{\partial z}$.

(utiliser pour cela l'approximation aux petits angles)

B10. Exprimer la déflexion verticale maximale H_{max} observée sur l'écran en fonction de D, L, d, n_1, n_2 et du temps t.
Préconiser, en décrivant l'expérimentation et en représentant l'aspect de l'écran, une méthode de détermination du coefficient de diffusion D.
Quel(s) paramètre(s) influe(nt) majoritairement sur la précision de détermination du coefficient de diffusion ?

QUATRIEME PARTIE

DIFFUSION THERMIQUE DANS UN FIL ELECTRIQUE

Considérons un fil métallique cylindrique, homogène, de section droite S dont le périmètre vaut p et de longueur L. Le rayon de ce fil est supposé petit par rapport à sa longueur.

Le métal constitutif possède une conductivité thermique λ, une résistivité électrique ρ, une masse volumique μ et une capacité thermique massique C.

Dans la première partie de l'étude, les parois latérales du fil sont parfaitement calorifugées et les extrémités sont maintenues à des températures T_1 et T_2 (avec $T_1 > T_2$) grâce à des thermostats. La température T(x) dans le fil ne dépend que de l'abscisse x (Figure 5a), avec $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$.

Toute l'étude est réalisée en régime permanent.

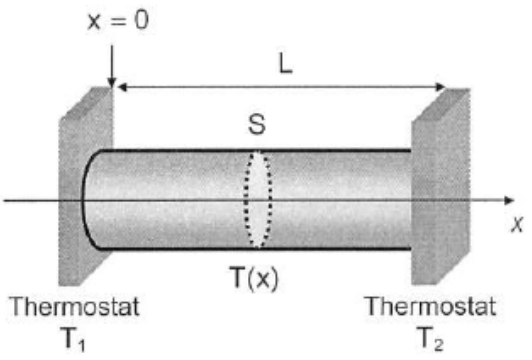


Figure 5a

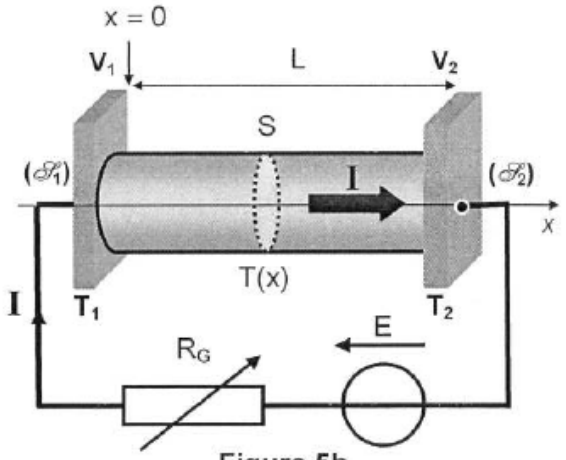


Figure 5b

D1. Rappeler la loi de Fourier pour une densité volumique de courant thermique notée $\vec{j}_{th}$; exprimer le flux (ou puissance) thermique Φ_{th} traversant une section droite S du fil.

D2. Etablir, à l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche élémentaire du fil de section S et de longueur dx, l'équation différentielle vérifiée par la température T(x).
En déduire la loi de répartition de T(x) en fonction de T_1, T_2, L et x.
Tracer schématiquement cette répartition de température en fonction de x.

D3. Exprimer la puissance thermique Φ_2 cédée à la source de température T_2 en fonction de λ, S, T_1, T_2 et L.

Le fil est maintenant parcouru par un courant électrique continu d'intensité I, répartie uniformément sur toute la section S (Figure 5b). Les sections terminales ($\mathscr{S}_1$) et ($\mathscr{S}_2$) sont maintenues simultanément à des températures constantes T_1 et T_2, et à des potentiels constants V_1 et V_2. Après établissement d'un régime stationnaire, les surfaces isothermes et équipotentielles sont des plans orthogonaux à l'axe Ox.

La résistivité électrique ρ du fil est indépendante de la température et le fil est considéré comme un conducteur ohmique ayant une résistance constante bien que la température T(x) ne soit pas uniforme. Les dimensions du fil ne varient pas avec la température.

D4. Exprimer, par application de la loi d'Ohm, la résistance dR d'une tranche élémentaire du fil, de longueur dx et de section S ; en déduire la puissance thermique volumique $\mathscr{P}_{th,v}$ produite au sein du fil, en fonction de l'intensité I, de S et ρ.

D5. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température T(x).
En déduire l'expression de T(x), puis celle de la densité volumique de courant de chaleur $j_{th}(x)$ en fonction de ρ, λ, S, T_1, T_2, L, x et I.

D6. Ecrire le courant de chaleur ou flux thermique Φ_{th} le long du fil, en notant $\mathscr{C} = \dfrac{\lambda S}{L}$ sa conductance thermique et R sa résistance électrique.
Tracer, toujours avec $T_1 > T_2$, l'allure de la répartition de température T(x) en distinguant les cas où le terme $\dfrac{1}{2}RI^2$ est inférieur ou supérieur à la quantité $\mathscr{C}(T_1 - T_2)$. Commenter.

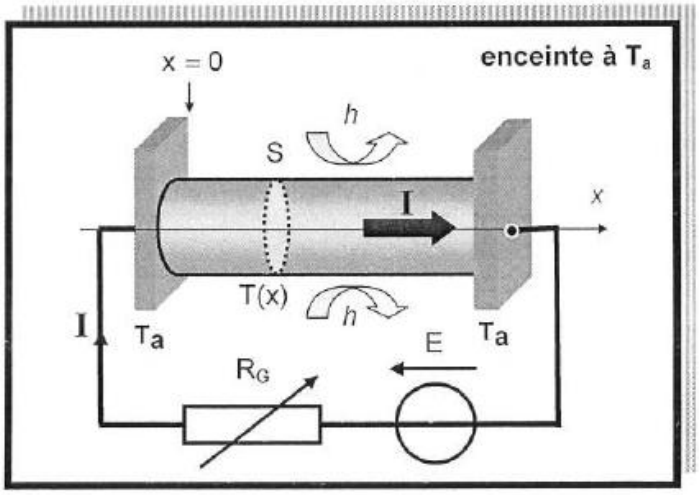
D7. Déterminer la puissance thermique Φ'_2 désormais cédée à la source de température T_2. Interpréter physiquement le résultat obtenu.

Le dispositif précédent est maintenant placé dans une enceinte maintenue à une température uniforme T_a. Le fil est relié à deux bornes maintenues rigoureusement à la même température T_a. La capacité thermique de ces bornes est suffisamment grande pour que leurs températures restent constantes et égales à T_a. (Figure 6)

Le fil subit, à travers sa surface latérale, des pertes thermiques conducto-convectives latérales ; elles correspondent à la puissance thermique $d\Phi_{cc} = h\left[T(x) - T_a\right] d\Sigma$ cédée par le fil au milieu extérieur, h étant le coefficient d'échange et $d\Sigma$ un élément de surface latérale du fil.

Ce dispositif est destiné à un banc expérimental de mesure de la conductivité thermique du fil métallique ; afin d'améliorer la précision de la mesure, il convient de tenir compte de la variation de la résistivité électrique en fonction de la température, suivant la loi : $\rho(x) = \rho_a\left[1 + \beta\left(T(x) - T_a\right)\right]$, où ρ_a désigne la résistivité électrique à la température T_a et β une constante positive.

Figure 6



D8. Proposer, en raisonnant sur une tranche élémentaire de fil de longueur dx et de section S, un bilan des flux thermiques en présence ; en déduire l'équation différentielle vérifiée par la grandeur $\theta(x) = T(x) - T_a$, sous la forme :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + m^2\,\theta(x) = -k\,.$$

Exprimer m^2 en fonction du périmètre p de la section droite, de h, λ, ρ_a, β, S et I, puis écrire k en fonction de λ, ρ_a, S et I.

D9. Montrer que, selon la valeur de l'intensité I du courant, trois types de solutions mathématiques de $\theta(x)$ sont attendues. *(aucune résolution de l'équation différentielle n'est demandée)*

Réalisons l'expérience suivante : le fil est alimenté par un courant dont l'intensité I_0 correspond au cas particulier où $m^2 = 0$.

D10. Préciser la valeur I_0 de cette intensité en fonction de h, p, ρ_a, β et S.
Résoudre l'équation différentielle qui en résulte en établissant la loi de variation de la température $\theta(x)$.
Illustrer son évolution à l'aide d'un schéma. Analyser physiquement le résultat obtenu.

D11. Exprimer la résistance électrique R_a du fil, à la température uniforme T_a, puis celle de sa résistance R lorsqu'il est à la température T en fonction de R_a, β, k et L.

En déduire la variation relative de résistance $\delta = \dfrac{R - R_a}{R_a}$, puis l'écrire en fonction des grandeurs h, p, λ, L et S.

D12. Le coefficient d'échange h étant déterminé par ailleurs à l'aide d'une autre expérience, proposer le mode de détermination de la conductivité thermique λ du métal constituant le fil.

- *Définition de la **fonction erreur** (error function) :* $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-s^2\right) ds$

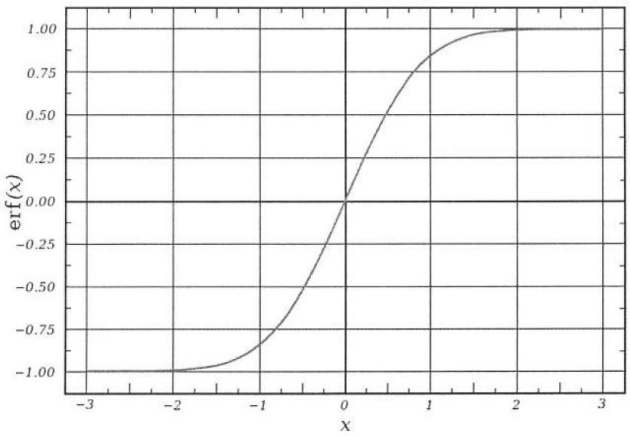
- *Propriétés de erf(x) :*

$$\mathrm{erf}(x) = -\mathrm{erf}(-x) \qquad \mathrm{erf}(0) = 0 \qquad \mathrm{erf}(\pm\infty) = \pm 1$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \exp\left(-s^2\right) ds$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{erf}(x)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-x^2\right)$$

- *Intégrale d'Euler :* $\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-s^2\right) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



Représentation de la fonction erreur

II. DESSALEMENT PAR OSMOSE INVERSE (Centrale PSI 2010 – Extrait)

I.B.1) Un système fermé est composé d'un corps pur A sous deux phases (1) et (2), à température et pression constantes.

a) Exprimer l'enthalpie libre G de ce système en fonction des potentiels chimiques de A dans les deux phases, $\mu_A(1)$ et $\mu_A(2)$, et des quantités de matière respectives n_1 et n_2.

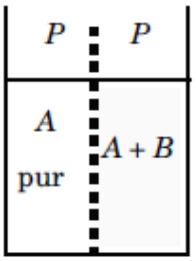
b) Quelle propriété possède G lorsque le système est à l'équilibre ? En déduire une relation entre $\mu_A(1)$ et $\mu_A(2)$ à l'équilibre.

c) Lorsque cette condition n'est pas réalisée, dans quel sens le système évolue-t-il ?

I.B.2) On étudie le système suivant à l'état liquide et à la température T constante :

- compartiment (1) : solvant A pur,
- compartiment (2) : mélange idéal de B et de A.

Les deux compartiments sont séparés par une paroi semi perméable, qui laisse passer uniquement les molécules du solvant A. La même pression P règne au-dessus des deux compartiments.



a) On rappelle l'expression du potentiel chimique du constituant i d'un mélange idéal :

$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i°(T) + RT\ln(x_i)$.

- Rappeler la définition de $\mu_i°(T)$.
- En quoi cette expression n'est-elle qu'une expression approchée du potentiel chimique ?

On montre que, s'il faut tenir compte de la pression P au-dessus du système, cette expression doit être remplacée par :

$$\mu_A(T, P, x_A) = \mu_A^\circ(T) + V_{mA}(P - P^\circ) + RT\ln x_A$$

où V_{mA} désigne le volume molaire de A, considéré comme constant. On adoptera cette expression dans la suite.

b) Montrer que le système ne peut être en équilibre et indiquer son sens d'évolution.

Pour cela, on écrira les potentiels chimiques de l'espèce A dans les compartiments 1 et 2 et on les comparera en raisonnant par analogie avec la question 1.

Ce phénomène est appelé osmose (directe). Le texte suivant en décrit une application :

Le sel et le sucre empêchent la prolifération bactérienne : le sel conserve viandes et poissons tandis que le sucre préserve les confitures. Une méthode ancienne de protection des plaies utilisée en l'absence d'antiseptique pour éviter la gangrène des plaies infectées était l'application de sucre (puis d'iode).

La plupart des bactéries sont des organismes unicellulaires. Elles contiennent une solution aqueuse d'ions, d'acides aminés et de protéines et ne sont protégées de l'extérieur que par une membrane perméable à l'eau.

Expliquer comment l'ajout de sel ou de sucre à une solution bactérienne peut détruire ces bactéries.

c) On suppose maintenant qu'on crée des conditions de pression différentes : P_1 au-dessus du compartiment (1) et P_2 au-dessus de (2) ; on appelle *pression osmotique* Π la valeur particulière de $\Delta P = P_2 - P_1$ qui permet au système de rester à l'équilibre.

Exprimer Π en fonction de x_B, fraction molaire de B dans le mélange (2) et de V_{mA}. En considérant que dans le mélange (2), $x_B \ll 1$, montrer que $\Pi \approx RTC_B$, où C_B désigne la concentration molaire de B dans le compartiment (2), et généraliser au cas où la solution renferme plusieurs espèces dissoutes.

d) Calculer Π pour une solution aqueuse de chlorure de sodium à $0,6\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ à $298\ \text{K}$. On donnera la réponse en pascals puis en bars.

I.B.3) Qu'observe-t-on si on impose une pression P_2 telle que $P_2 - P_1$ soit supérieure à Π ?

En déduire le principe du procédé de dessalement de l'eau de mer par *osmose inverse* qui se développe actuellement dans de nombreux pays du Sud parce qu'il est peu coûteux en énergie. Quelles limitations voyez-vous à ce procédé ?

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

La concentration moyenne des océans en chlorure de sodium est de 0,6 mol/L.

III. LES FROTTEMENTS DE GLISSEMENT (Centrale PSI 2013 – extrait)

Données numériques

Matériau	ρ (kg · m^{-3})	c (J · K^{-1} · kg^{-1})	λ (W · K^{-1} · m^{-1})	τ_c (Pa)
acier	$7,9 \times 10^3$	$4,5 \times 10^2$	75	2×10^8
granit	$2,7 \times 10^3$	$8,0 \times 10^2$	2,2	2×10^8
Téflon	$2,2 \times 10^3$	$1,1 \times 10^3$	2,3	2×10^6
cuivre	$9,0 \times 10^3$	$3,9 \times 10^2$	$3,9 \times 10^2$	
chêne	8×10^2	2×10^3	0,2	
glace	$9,2 \times 10^2$	$2,1 \times 10^3$	2,3	

Échelles de température : 0°C = 273,15 K
Pression atmosphérique : $P = 101,3$ kPa
Coordonnées du point triple de l'eau : $T_t = 273,16$ K, $P_t = 0,611$ kPa
Viscosité dynamique de l'eau à 0°C : $\eta = 1,8 \times 10^{-3}$ Pa · s
Masse volumique de l'eau liquide : $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg · m^{-3}
Enthalpie massique de fusion de la glace 0°C : $L_f = 3,3 \times 10^5$ J · kg^{-1}
Dureté de l'acier : $\sigma_c = 1 \times 10^9$ Pa
Accélération de la pesanteur $g = 9,8$ m · s^{-2}.

Formulaire

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \int_0^\infty u\,e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha^2} \qquad \int_0^\infty u^{3/2}\,e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{5/2}}$$

$$\mathrm{div}\,\alpha\vec{A} = \alpha\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\alpha$$

En coordonnées cylindriques,

$$\mathrm{div}\vec{A}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Cet énoncé aborde quelques phénomènes associés aux frottements de deux solides Σ_1 et Σ_2 en glissement relatif le long de leur interface. Dans ce contexte, il est fondamental de distinguer l'aire apparente S de cette interface, telle que l'on peut la percevoir à l'échelle macroscopique, de l'aire réelle de contact A. En effet, la surface d'un solide, rugueuse à l'échelle micrométrique, présente des aspérités de hauteurs diverses. Seules les plus proéminentes de chacun des solides se rencontrent et se déforment, faisant apparaitre de petites zones plates appelées jonctions où l'interaction entre les solides se concentre.

I Effets thermiques aux jonctions

Lorsque Σ_1 et Σ_2 glissent l'un contre l'autre, les jonctions s'échauffent à cause de la dissipation d'énergie associée aux frottements. Dans cette partie, on étudie quantitativement cet effet.

I.A – Diffusion thermique dans un milieu semi-infini

On considère pour l'instant un solide indilatable, homogène et semi-infini, situé dans le domaine $z \in [0, +\infty[$, latéralement limité par un cylindre de section s et de génératrices parallèles à $\vec{e}_z$ (**figure 1**). Ce solide cylindrique est calorifugé latéralement. On note λ la conductivité thermique du matériau dont est constitué le cylindre, ρ sa masse volumique et c sa capacité calorifique massique, quantités indépendantes de la température. Ce milieu, présentant préalablement une température uniforme T_0, va recevoir de l'énergie thermique au travers de sa surface d'équation $z = 0$ seulement. Le rythme auquel ce transfert s'effectue sera précisé plus loin. On analyse l'évolution de sa température T supposée ne dépendre que de z et du temps t. On note $\theta(z,t) = T(z,t) - T_0$ l'élévation de température provoquée par l'apport thermique.

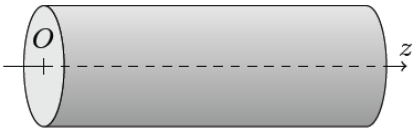


Figure 1

I.A.1) Montrer que l'élévation de température $\theta(z,t)$ obéit à l'équation aux dérivées partielles

$$\rho c \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2}$$

Que devient cette équation lorsque λ dépend de la température T ?

I.A.2) Milieu chauffé brièvement

Dans cette question, le solide n'est chauffé que pendant une durée extrêmement brève entre les instants $t_0 - \delta t$ et $t_0 = 0$. Pendant ce très court échange, le solide reçoit la quantité de chaleur $\delta Q_0 = j_0 s \delta t$. Il en résulte une petite élévation de température notée $\delta\theta(z,t)$.

a) Que vaut $\delta\theta(z,t)$ pour $t < -\delta t$ et $z \geqslant 0$?

b) On note $G(z,t) = \dfrac{B}{\sqrt{t}} \exp\left(-\dfrac{z^2}{4\mathcal{D}t}\right)$ avec $\mathcal{D} = \dfrac{\lambda}{\rho c}$. Vérifier que la fonction $\delta\theta(z,t) = G(z,t)\delta t$ est solution de l'équation aux dérivées partielles établie dans la **question I.A.1**.

c) Exprimer la variation de l'énergie interne U du solide entre un instant $t_1 < -\delta t$ et un instant $t_2 > 0$, d'une part en fonction de j_0, d'autre part en utilisant $G(z,t)$. En déduire l'expression de B en fonction de j_0, expression que l'on simplifiera en introduisant l'effusivité thermique $e = \sqrt{\lambda \rho c}$.

d) Plaçons-nous maintenant dans la situation où le très bref échange thermique δQ_0 a lieu à un instant $t_0 > 0$. Exprimer $\delta\theta(z,t)$ en distinguant deux intervalles de temps.

I.A.3) Milieu chauffé continument

a) Le système est maintenant chauffé sans interruption à partir de l'instant initial avec une densité de flux thermique j_0 fonction du temps.

Quelle quantité de chaleur δQ_0 reçoit-il entre $t_0 - \delta t_0$ et t_0 ? Quelle élévation de température $\delta\theta(z,t)$ cela provoque-t-il à la cote z à un instant $t > t_0$? En déduire sous la forme d'une intégrale l'élévation de température $\theta(z,t)$ produite par l'apport thermique ininterrompu depuis l'instant initial.

b) Dans le cas particulier où j_0 ne dépend pas du temps, le calcul de l'intégrale précédente, non demandé, conduit à

$$\theta(z,t) = \frac{2j_0\sqrt{t}}{e\sqrt{\pi}}\, f\left(\frac{z}{2\sqrt{\mathcal{D}t}}\right)$$

où f est une fonction dont le graphe est fourni sur la **figure 2**.

Exprimer l'élévation de température $\Delta T = T(0,t) - T_0$ de l'interface $z = 0$.

La profondeur δ caractéristique de l'échauffement à un instant t est définie par $\theta(\delta, t) = \dfrac{\Delta T}{2}$. En donner une expression approchée.

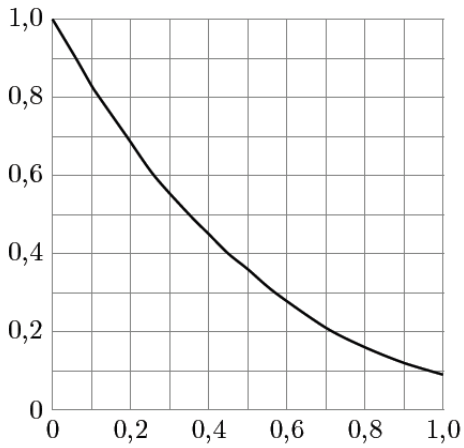


Figure 2 Graphe de la fonction f

I.B – Production d'énergie thermique par les frottements

On étudie dorénavant la situation où deux cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ identiques au précédent, occupant respectivement les régions $z > 0$ et $z < 0$, s'échauffent à cause des frottements sur leur interface $z = 0$. On note s l'aire de cette interface, $\Phi_1 = j_1 s$ et $\Phi_2 = j_2 s$ les flux thermiques reçus par chacun d'eux. Pour simplifier on suppose que $\mathcal{C}_1$ glisse sur $\mathcal{C}_2$ immobile et que les deux solides n'échangent d'énergie que l'un avec l'autre, leur ensemble étant isolé thermodynamiquement du reste de l'univers. Soit p_s la puissance surfacique négative des forces de frottement exercées par $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_1$.

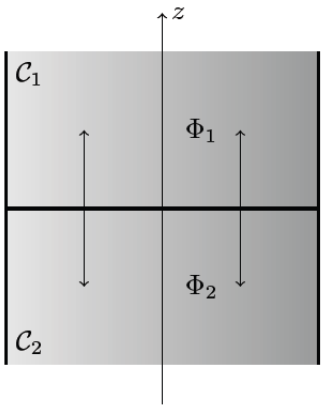


Figure 3

I.B.1) On note $\mathcal{E}_i = U_i + E_{ci}$ avec $i \in \{1, 2\}$ l'énergie totale du cylindre $\mathcal{C}_i$, composée de ses énergies interne et cinétique. Appliquer le premier principe de la thermodynamique à chacun des deux solides entres deux instants séparés de dt.

I.B.2) Appliquer le premier principe à l'ensemble des deux solides.

I.B.3) En déduire une relation entre p_s, j_1 et j_2.

I.C – Application aux jonctions

Le modèle développé dans les questions précédentes permet d'estimer l'échauffement des jonctions décrites dans l'introduction lorsque $\mathcal{C}_1$ glisse sur $\mathcal{C}_2$ à la vitesse v. Dans ce cas on note τ_c la force tangentielle par unité de surface exercée par $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_1$. La puissance surfacique correspondante s'exprime par $p_s = -\tau_c v$.

I.C.1) Quand $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont formés du même matériau avec le même état de surface, donner l'expression de j_1 et de j_2 en fonction de p_s.

I.C.2) Les jonctions ont un diamètre de l'ordre de 0,1 mm. Quelle est la durée τ du contact si $v = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

I.C.3) Pour estimer les effets thermiques au niveau des jonctions, on utilise les résultats de **I.A.3.b** à l'instant $t = \tau$.

a) Comparer quantitativement les propriétés de l'acier, du granit et du Téflon en calculant l'élévation de température de l'interface et la profondeur δ à la fin du contact.

b) Analyser la pertinence de l'approximation qui consiste à supposer les deux milieux semi-infinis pour étudier la diffusion thermique dans chaque jonction (hypothèse introduite au début de **I.A**).

II Un système auto-lubrifié

Les forces de frottement associées au glissement d'un solide sur la glace ou la neige sont fréquemment étudiées en raison de leur importance pour diverses pratiques récréatives ou pour les moyens de transport dans les régions froides. À des températures de l'ordre de $-40°C$, ce glissement s'effectue avec une résistance énorme, comparable à celle que l'on observe sur du sable. Pour des températures de l'ordre de $-10°C$, les forces de frottement chutent d'un ordre de grandeur et le glissement devient aisé. Ce comportement s'explique par la fusion superficielle de la glace sous l'objet glissant, la fine couche d'eau liquide apparue jouant le rôle de lubrifiant. L'écoulement de cette eau est supposé incompressible dans tout le problème. Nous appellerons « patin » le solide Σ_1 glissant sur la glace, désignée par Σ_2.

II.A – Mécanisme de fusion

Deux hypothèses ont été émises pour expliquer la fusion superficielle de la glace :
- selon Reynolds, la fusion s'explique par la surpression exercée par le patin sur la glace ;
- selon Bowden, la fusion s'explique par l'élévation de température provoquée par les frottements.

Les questions ci-dessous apportent des éléments pour trancher parmi ces deux propositions.

II.A.1) Considérons une paire de skis d'aire apparente $S = 0{,}3\,\mathrm{m}^2$ supportant un skieur de 75 kg (skis compris) glissant sur un plan horizontal. On suppose que l'aire réelle de contact A représente un millième de l'aire apparente. Calculer la surpression s'exerçant sur la neige.

II.A.2) Rappeler l'allure du diagramme d'état de l'eau dans le plan (P, T). On assimile la courbe relative à l'équilibre liquide-solide à une droite. On cherche à déterminer sa pente.

a) A l'équilibre, quelle est la relation entre les potentiels chimiques (ou enthalpies libres molaires) pour un corps pur présent sous deux phases 1 et 2 à la pression P et la température T ?

b) Ecrire cette relation à (T, P) puis à (T+ dT, P+ dP). En déduire une relation entre $d\mu_1$ et $d\mu_2$.

c) Sachant que $d\mu_i = v_i dP - s_i dT$ où v_i et s_i sont respectivement le volume et l'entropie molaire du corps pur dans la phase i, en déduire une expression de $\frac{dP}{dT}$.

d) Montrer que la pente recherchée est donnée par :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L_f}{T(v_{l,massique} - v_{s,massique})}$$

Quel est le lien entre volume massique et masse volumique ?

Déterminer la pente de la courbe de fusion à l'aide des données.

e) Quel est l'abaissement de la température de fusion provoqué par la surpression de la question précédente ?

II.A.3) Considérons maintenant l'échauffement associé aux frottements pour un patin glissant à la vitesse $v = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ sur une glace sèche, la force surfacique de frottement valant $\tau_c = 1 \times 10^7$ Pa. Calculer numériquement la puissance surfacique $p_s = -v\tau_c$ correspondante.

II.A.4) Pour un patin isolant, toute la chaleur produite par les frottements diffuse vers la glace. En utilisant le résultat de la **question I.A.3.b**, exprimer l'échauffement de la surface de la glace pendant la durée τ d'un contact.

II.A.5) Calculer numériquement le temps nécessaire à un échauffement de 10°C.

II.A.6) L'expérience montre que les forces de frottement augmentent énormément si v tend vers 0 et que des patins en cuivre glissent beaucoup moins bien que des patins en bois de chêne. Parmi les hypothèses de Bowden et Reynolds, laquelle est correcte ? Vous expliquerez comment chacun des points précédents concourt à la conclusion ou au contraire s'y oppose.