

PROBLEME I : Mines-Ponts PSI extrait**DE LA PHYSIQUE AUTOUR D'UN TORE**

Ce sujet comporte deux parties totalement indépendantes qui explorent les propriétés physiques d'objets de forme torique. Un tore est le volume généré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (dans le problème, ce sera un rectangle ou un cercle, voir figure 1) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\hat{u}_z$) ou d'une flèche dans le cas général ($\vec{p}$).

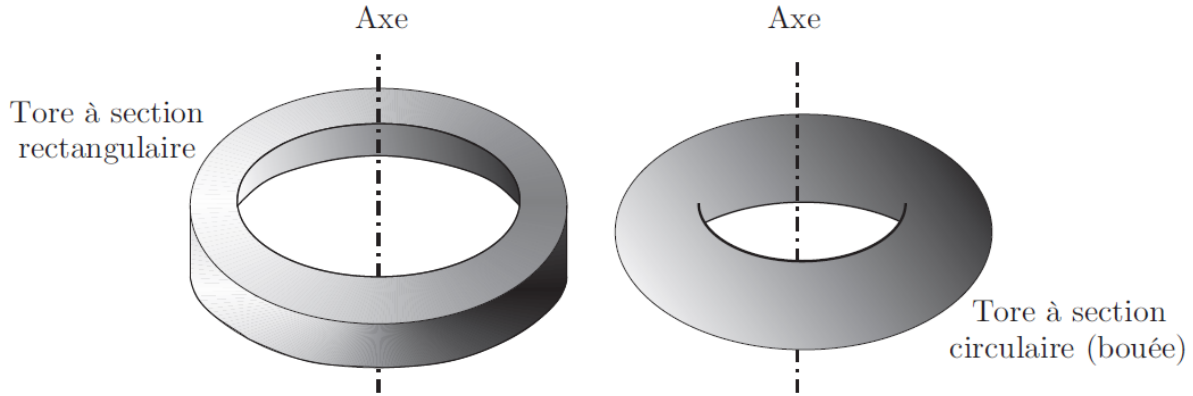


FIGURE 1 – Deux types de tores

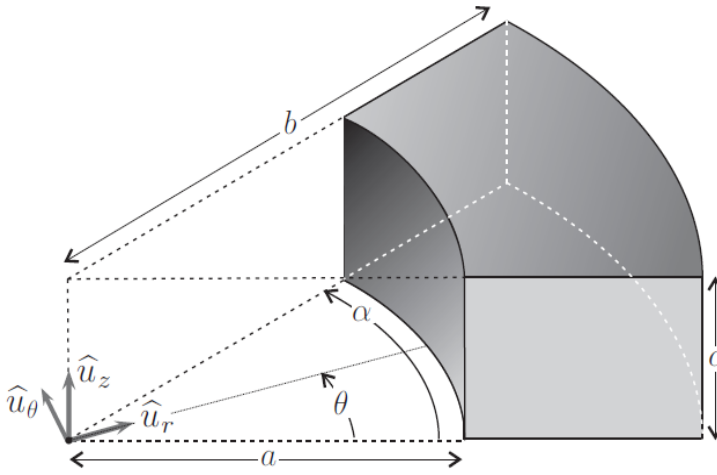
II. — Étude d'un conducteur ohmique torique

FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

❑ 6 — On rappelle la valeur numérique

de la constante $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante. Rappeler la loi d'Ohm locale.

Pour traiter la question 7-, on utilisera notamment l'équation de Maxwell-Gauss et celle de conservation de la charge.

❑ 7 — Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ . En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée T caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

- 8 — Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si $T \gg \tau$.
- 9 — Établir l'équation vérifiée en régime stationnaire, dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V .
- 10 — On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\vec{\text{grad}}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ $\vec{E}$ et de la densité de courant $\vec{j}$.
- 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a , b , c , γ et α .
- 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a .

FIN DE LA PARTIE II

III. — Étude d'une pince ampèremétrique

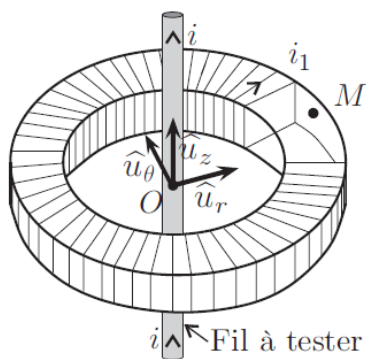


FIGURE 4 — Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c , d'axe (O, z) . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$ avec $r \in [a, b]$ et $z \in [0, c]$.

Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

- 13 — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.
- 14 — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0 , $i(t)$, $i_1(t)$, N et r .
- 15 — Calculer le flux Φ de $\vec{B}$ à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

- ❑ 16 — Déterminer l'expression de la résistance totale R_p du bobinage en fonction de a , b , c , N et λ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.

- ❑ 17 — Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M , ω , R_p et L .

- ❑ 18 — Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?



PROBLEME II : ETUDE D'UN CONDENSATEUR PLAN

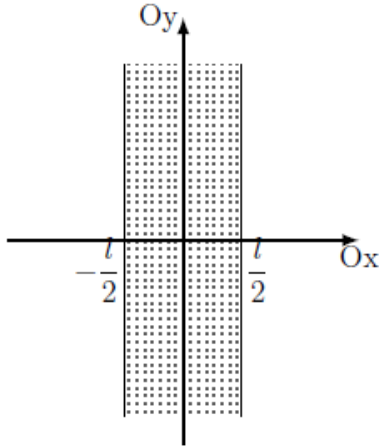
Dans ce sujet, on se propose d'étudier les propriétés électromagnétiques d'un condensateur plan. La première partie aborde l'étude en régime statique puis dans la suite le comportement en régime variable est abordé.

Partie I: cas statique

On considère une plaque plane chargée uniformément en surface selon une densité surfacique σ_0 . Cette plaque modélise une armature du condensateur et est plongée dans un milieu dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées au vide. Elle est de plus très longue selon Oz et Oy de sorte qu'on l'assimile au plan zOy.

1. Illustrer par deux schémas distincts la notion de plan de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges fixes dans le référentiel d'étude. Vous illustrerez aussi la direction particulière du champ en un point du plan de symétrie et du plan d'antisymétrie et aussi la façon dont le champ se transforme en deux point symétriques de ces plans.
2. Énoncer les deux équations de Maxwell dont est solution le champ $\vec{E}$ dans le cadre de l'étude. Quelles sont les conséquences de ces deux équations ?
3. Déterminer la structure de $\vec{E}$.
4. Calculer le champ électrique en tout point $z \neq 0$

5. On considère à présent l'ensemble des deux armatures $(+\sigma_0; -\sigma_0)$ et on note e l'épaisseur du condensateur. Calculer le champ en tout point (distinct des armatures). Un schéma pourra être utile.
6. En déduire l'expression de la capacité du condensateur en fonction des paramètres de celui-ci.
7. Dans ce qui suit on prend en compte l'épaisseur non nulle des armatures, chacune formant alors ce que l'on appelle une "lame chargée" uniformément en volume avec une densité ρ (positive) pour l'une et $-\rho$ (négative) pour l'autre.
- On considère donc une telle distribution de charge en volume limitée par les plans d'équations respectives $x = -l/2$ et $x = +l/2$ (où l est une constante positive désignant l'épaisseur de la lame) et infinie dans les directions Oy et Oz . Pour (a) et (b), on prendra ρ positive.



- (a) Calculer l'expression du champ $\vec{E}$ en tout point par l'équation locale de Maxwell-Gauss.
- (b) Déterminer l'expression du potentiel $V(M)$. On le prendra nul sur l'axe Oy .
- (c) On considère à présent l'ensemble des deux lames $(+\rho, -\rho)$ dont les centres sont séparés de $e > l$, modélisant donc le condensateur précédemment étudié. Déterminer le lien entre ρ et σ_0

Partie II : Etude en régime variable

Un formulaire et un schéma sont donnés en fin de texte

Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe $\Delta = z'z$, séparées d'une hauteur h (Figure II-1). Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$, qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ $\vec{E}_0 = \vec{e}_0 \cos \omega t$ uniforme, sinusoïdal dans le temps et axial (c'est à dire parallèle à l'axe Δ), qu'on écrit en notation complexe : $\underline{\vec{E}}_0 = \vec{e}_0 \exp i \omega t$ où $\vec{e}_0$ est l'amplitude du champ $\vec{E}_0$.

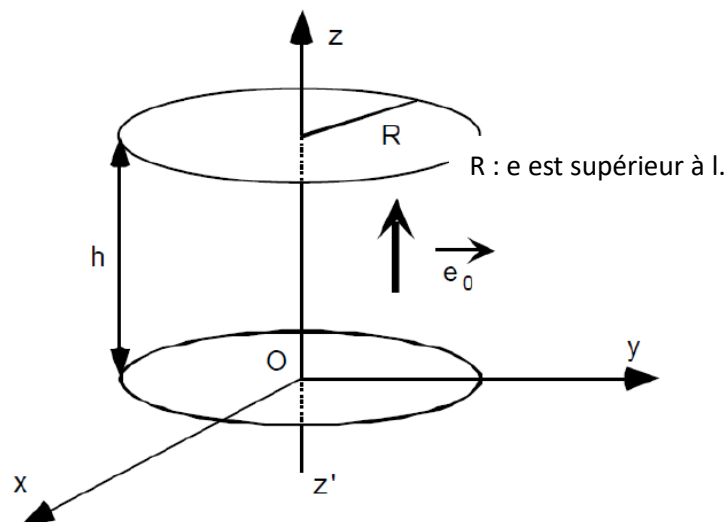


Figure II-1

Le champ électrique $\vec{E}_0$ crée un champ magnétique $\vec{B}_1$, lequel engendre un champ électrique $\vec{E}_2$, qui crée à son tour un champ magnétique $\vec{B}_3$, qui engendre $\vec{E}_4$, etc.
 Dans tout le problème, on négligera les effets de bord.

II.A Calcul des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{E}_2$.

II.A.0 Ecrire les équations de Maxwell dans le vide.

II.A.1 Les variations dans le temps du champ électrique $\vec{E}_0$ créent un champ magnétique $\vec{B}_1$. On veut calculer $\vec{B}_1$.

II.A.1.a En un point M entre les plaques, donner l'équation de Maxwell à laquelle satisfait $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de ω , c (la vitesse de la lumière dans le vide) et $\vec{E}_0$.

II.A.1.b On se place dans les coordonnées cylindriques. Montrer que $\vec{B}_1(M, t)$ est orthoradial (c'est à dire dirigé selon $\vec{u}_\theta$).

II.A.1.c Soit le cercle C_1 parallèle au plan xOy, centré sur Δ et passant par M.

Calculer la circulation $\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}$ de $\vec{B}_1$ sur le contour C_1 qu'on orientera comme $\vec{B}_1$.

En déduire l'expression de $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de c, $X = \frac{\omega \rho}{2c}$ et $\vec{E}_0$.

Quelle est la dimension de X ?

II.A.2 Les variations dans le temps du champ magnétique $\vec{B}_1$, créent un champ électrique $\vec{E}_2$. On veut calculer $\vec{E}_2$.

II.A.2.a Quelle relation lie $\vec{E}_2$ à $\vec{B}_1$? En déduire l'équation de Maxwell satisfaite par $\vec{E}_2(M, t)$ en fonction de c, X, ω et $\vec{E}_0$.

II.A.2.b Sans faire de calculs, montrer que l'on peut supposer $\vec{E}_2$ axial.

II.A.2.c Soit le contour orienté rectangulaire C_2 (Figure II-2) dans un plan méridien :

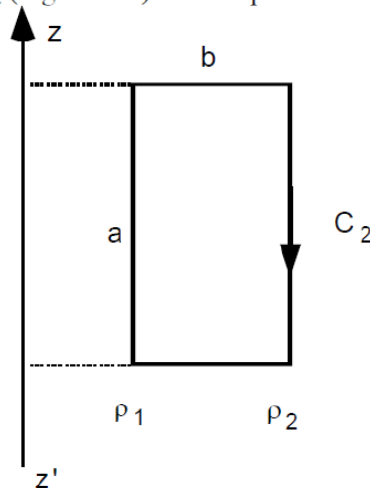


Figure II-2

Calculer la circulation $\oint_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$ de $\vec{E}_2$ sur C_2 .

En déduire l'expression de $\vec{E}_2(M, t)$ en fonction de X et $\vec{E}_0$ en prenant $\vec{E}_2(\rho = 0) = \vec{0}$.

II.B Comportement à basse fréquence.

A basse fréquence ($X \ll 1$) on néglige les termes en X de degré supérieur à 2.

II.B.1 Exprimer, dans ces conditions, le champ magnétique total $\vec{B}_{BF}(M, t)$ et le champ électrique total $\vec{E}_{BF}(M, t)$ qui règnent en M à l'instant t à l'intérieur du condensateur, en fonction de c, X et $\vec{E}_0$.

II.B.2 Étude énergétique.

II.B.2.a Calculer la densité volumique instantanée $\epsilon_e(t)$ d'énergie électrique et la densité volumique instantanée $\epsilon_m(t)$ d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de ϵ_0 (la permittivité du vide), X , ωt et $e_0 = \left| \vec{e}_0 \right|$.

II.B.2.b On note $\langle \epsilon_{e,m}(t) \rangle_t$ les moyennes temporelles correspondantes.

Exprimer, en fonction de X , le rapport $\frac{\langle \epsilon_m \rangle_t}{\langle \epsilon_e \rangle_t}$. Que concluez-vous ?

On rappelle que $\epsilon_e(t) = (\frac{1}{2}) \epsilon_0 E^2$ et que $\epsilon_m(t) = (\frac{1}{2}) \frac{1}{\mu_0} B^2$.

II.C Comportement à haute fréquence .

A haute fréquence, on ne peut plus négliger les termes en X de degré supérieur à 2. On va donc calculer $\vec{B}_3$ dont $\vec{E}_2$ est la source, $\vec{E}_4$ dont $\vec{B}_3$ est la source, etc ...

II.C.1 Donner l'orientation de $\vec{B}_3$.

Quelle est l'équation satisfaite par $\vec{B}_3$?

Calculer $\oint_{C_1} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l}$ et en déduire l'expression de $\vec{B}_3(M, t)$ en fonction de c , X et $\vec{E}_0$.

II.C.2 Calculer $\vec{E}_4(M, t)$.

II.C.3 Expression des champs $\vec{E}_{2n}$ et $\vec{B}_{2n+1}$.

II.C.3.a On veut calculer par récurrence l'expression de $\vec{E}_{2n}$. On suppose que : $\vec{E}_{2n}(M, t) = \frac{1}{(n!)^2} (iX)^{2n} \vec{E}_0(t)$

En déduire $\vec{B}_{2n+1}(M, t)$.

II.C.3.b Calculer alors $\vec{E}_{2n+2}(M, t)$. Que concluez-vous ?

II.C.4 Étude du champ électrique.

II.C.4.a Montrer que le champ électrique total $\vec{E}(M, t)$ qui règne à l'intérieur du condensateur s'exprime simplement en fonction de $\vec{E}_0$ et de la fonction de Bessel $J_0(x)$ (donnée en annexe), à condition d'attribuer à x une expression littérale qu'on donnera.

II.C.4.b Décrire la configuration du champ $\vec{E}(M, t)$ et examiner ses variations en fonction de ω . Montrer qu'à la périphérie du condensateur, certaines valeurs de ω annulent le champ électrique.

La partie suivante n'est pas à traiter pour ce DS, mais sa résolution figurera dans le corrigé fourni.

II.D Calcul direct du champ électrique total $\vec{E}$.

Au lieu de calculer le champ total sous forme d'une série, on souhaite calculer directement le champ électrique $\vec{E}$ qui règne entre les armatures.

II.D.1 Obtenir l'équation générale de propagation qui relie les dérivées partielles d'un champ électrique.

II.D.2 On cherche à cette équation une solution axiale, ayant la symétrie du cylindre (invariance par rotation et par translation selon l'axe de révolution), qu'on écrit en notation complexe :

$$\vec{E}(M, t) = E(\rho) \exp(i\omega t) \vec{k}$$

Donner l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction scalaire $E(\rho)$ pour une fréquence donnée.

II.D.3 Montrer, par un changement de variable judicieux, que cette équation différentielle peut s'écrire:

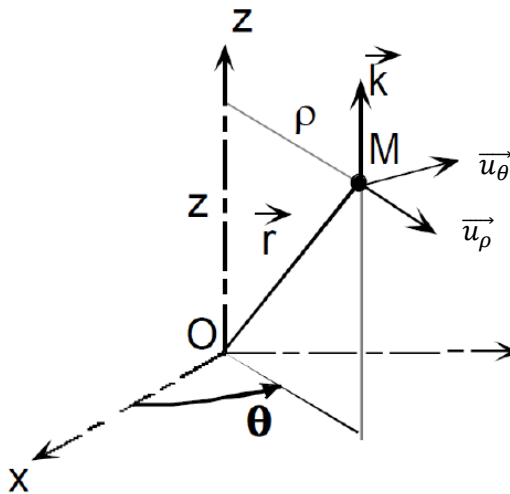
$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 \right) E(x) = 0$$

II.D.4 Montrer qu'on obtient la même solution que précédemment.

FORMULAIRE

Dans les coordonnées cylindriques, un point M est repéré par le jeu de coordonnées ρ, θ, z et la base locale est

$$\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}$$



$$\vec{r} = \vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

$$\vec{A}(M) = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{k}$$

$$\text{où } A_i = A_i(\rho, \theta, z) \quad i = \rho, \theta, z.$$

A condition que $\rho \neq 0$, on a :

$$(15) \quad \vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$(16) \quad \text{div } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$(17) \quad \vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{k}$$

Les formules (1) et (4) permettent d'obtenir les expressions du laplacien scalaire et du laplacien vectoriel. Dans le cas particulier d'un champ scalaire à symétrie cylindrique, le laplacien se réduit à :

$$(18) \quad \Delta f(\rho) = \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho}$$

Annexe III : Les fonctions de Bessel Inutile ici (partie II.D)

Les fonctions de Bessel $B_\nu(z)$ sont des solutions de l'équation différentielle :

$$(19) \quad \frac{d^2 B_\nu(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dB_\nu(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) B_\nu(z) = 0 \quad \nu \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ sont définies par la série :

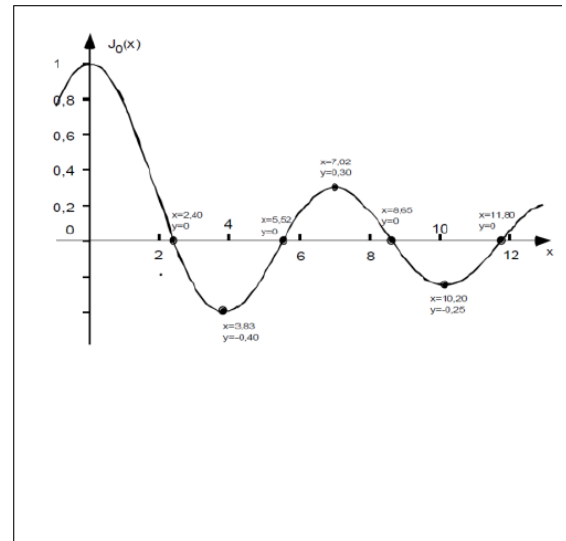
$$(20) \quad J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \quad |\arg z| < \pi$$

où Γ est la fonction qui généralise la fonction factorielle.

Dans le cas particulier $\nu=0$, nous avons :

$$(21) \quad J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}$$

Pour x réel, le graphe de la fonction $J_0(x)$ est, pour sa partie $x>0$, le suivant :



PROBLEME 3 : FREINAGES

On s'intéresse ici à une conséquence électromécanique de la loi de l'induction de Lenz-Faraday : le freinage inductif. Le déplacement d'une source de champ magnétique (aimant, bobinage) mobile en présence d'un conducteur électrique immobile (dans le premier problème), tout comme le déplacement d'un circuit électrique mobile dans une zone de champ magnétique statique (dans le second) ont pour conséquence le freinage du système mobile.

Dans le premier cas, le freinage inductif se manifeste par la dissipation de puissance par effet Joule du fait de la circulation de courants induits en volume (courants de Foucault) : c'est le principe des freins rhéostatiques installés sur certains véhicules lourds (autocars en zone de montagne, trains) lorsque le frottement de traînée aérodynamique et le freinage par friction ne suffisent pas.

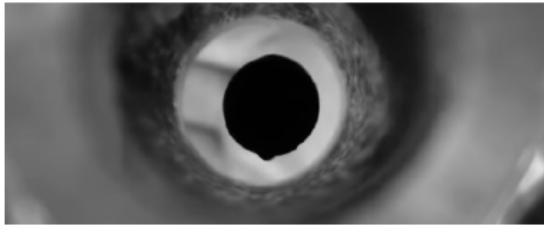
Dans le second cas, le freinage est une conséquence directe des courants induits à travers la force de Laplace. Elle est présentée ici dans le cadre d'une proposition récente permettant de faire descendre les satellites artificiels de la Terre hors d'usage sur une orbite assez basse pour que le freinage par l'atmosphère prenne le relais et provoque leur retombée sur terre ou leur destruction.

Ce sujet est constitué de deux problèmes **I** et **II** totalement indépendants. Pour les réponses aux questions posées, on distinguera **exprimer** (donner une forme littérale) et **calculer** (donner une valeur numérique). Toutes les données numériques nécessaires, ainsi qu'un bref formulaire, figurent en fin d'énoncé. Pour toutes les applications numériques demandées, on peut se limiter à un seul chiffre significatif. Lorsque l'énoncé demande d'expliciter la **dimension** d'une grandeur physique on le fera en fonction des dimensions fondamentales, longueur L , masse M , durée T , courant électrique I et température Θ . À titre d'exemple, la dimension d'une vitesse V pourra être notée $[V] = L \cdot T^{-1}$ et celle d'une force $[\vec{F}] = M \cdot L \cdot T^{-2}$.

I Freinage d'une chute libre

Cette partie comporte trois sous-parties **I.A**, **I.B** et **I.C** qui peuvent être abordées de manière totalement indépendante à condition d'admettre éventuellement les résultats affirmés par l'énoncé.

On s'inspire ici d'une vidéo de vulgarisation du MIT^a. D'après le commentaire proposé, « *Un aimant est abandonné le long d'un tube de cuivre et y subit une force résistive. La chute de l'aimant induit un courant dans le tube de cuivre et, du fait de la loi de Lenz, ce courant crée un champ magnétique qui s'oppose aux variations du champ dues à la chute de l'aimant. Ce dernier est ainsi repoussé et tombe plus lentement.* »



On voit (photographie ci-contre à droite) l'expérimentateur attendre plusieurs secondes l'arrivée de l'aimant à la base du tube alors que la même chute sans les effets inductifs dure quelques centièmes de seconde. Une vue par le haut (ci-dessus) montre l'aimant, sphérique, dans le tube pendant sa chute.



a. voir <https://www.youtube.com/watch?v=N7tIi71-AjA>

I.A Chute libre et freinage aérodynamique

L'objet dont on étudie la chute est soit une bille d'acier (sans propriété magnétique significative) soit un aimant sphérique ; dans les deux cas on prendra pour son rayon $r = 1$ cm et pour sa masse $m = 33$ g ; la chute se déroule à l'intérieur d'un tube de cuivre de hauteur $h = 20$ cm. On note g_0 l'accélération de la pesanteur.

- – 1. Dans le cas, où on néglige tous les frottements, exprimer puis calculer la durée Δt_h de traversée du tube sans vitesse initiale ainsi que la vitesse moyenne de chute v_m .

La chute est en fait ralentie par le frottement de l'air dans le tube, qu'on modélisera comme une force de traînée aérodynamique de norme :

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho S_{\perp} v^2$$

où $v = \|\vec{v}\|$ est la vitesse de chute, C_x le coefficient de traînée (sans dimension, supposé constant pendant la chute), ρ la masse volumique de l'air et $S_{\perp}$ la section droite de la bille, donc ici l'aire d'un disque de rayon r .

- – 2. Montrer que la vitesse de chute est régie par l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{v_\infty^2 - v^2}{v_\infty \tau}$; interpréter les constantes v_∞ et τ et exprimer v_∞/τ et $v_\infty \tau$.
- – 3. En admettant que les frottements restent un terme correctif modeste pendant la chute, déduire de v_m une estimation du nombre de Reynolds $\mathcal{R}$ qui caractérise l'écoulement de l'air autour de la bille lors de la chute de celle-ci.

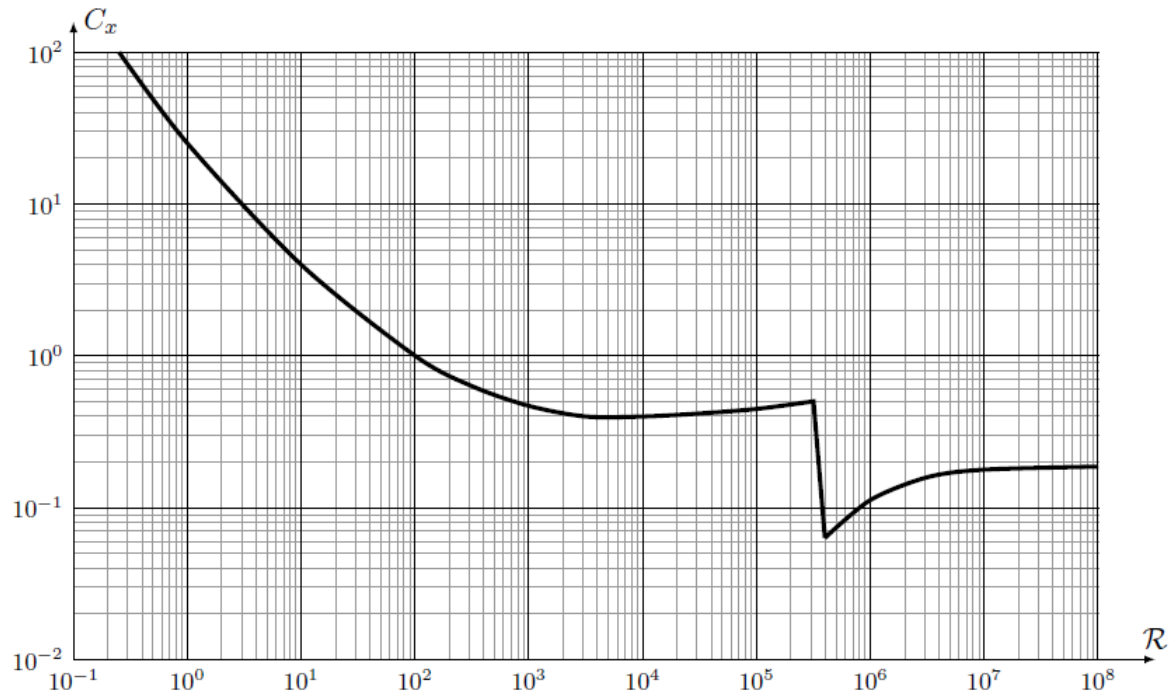


FIGURE 1 – Coefficient de traînée d'une sphère lisse dans l'air

- – 4. Le coefficient de traînée C_x pour une sphère lisse dépend du nombre de Reynolds comme le montre la figure 1. Estimer les ordres de grandeur de C_x puis de τ .
- – 5. Les frottements aérodynamiques permettent-ils de rendre compte d'un temps de chute est Δt_h de l'ordre de 4 secondes pour un tube de 20 cm de haut ? Conclure.

I.B Freinage inductif

Dans ce qui suit on négligera le freinage aérodynamique. Le tube de cuivre a pour rayon intérieur $r_i = 15$ mm et pour épaisseur $e = 7$ mm. On s'intéresse à une situation où l'aimant progresse vers le bas à la vitesse v supposée constante le long de l'axe (Oz) du tube (figure 2).

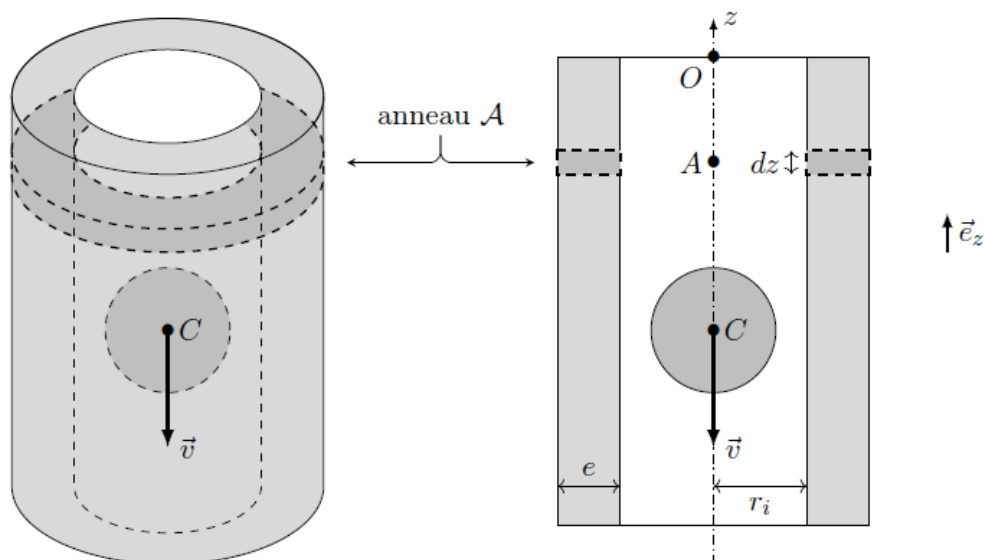


FIGURE 2 – Représentation perspective et en coupe de la chute de l'aimant (échelles non respectées)

Le mouvement de l'aimant crée un courant induit en volume dans le tube. Nous admettrons que l'aimant est équivalent à un dipôle magnétique ponctuel de moment dipolaire $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé en son centre C . Il descend à la vitesse $\vec{v} = -v \vec{e}_z$ avec $v > 0$. Nous admettrons aussi que les courants induits sont de géométrie orthoradiale : ils tournent dans le tube autour de l'axe (Oz) de la chute.

On rappelle que l'unité de moment dipolaire magnétique est l'A.m².

- – 6. On étudie d'abord une partie du tube délimitée par un anneau ($\mathcal{A}$) de centre A , de hauteur dz , disposé à l'ordonnée z , compris entre les rayons r_i et $r_i + e$ (cf. figure 2) au sein du cuivre, matériau vérifiant la loi d'Ohm avec la conductivité γ .

En considérant $e \ll r_i$ (même si cette approximation n'est pas pertinente au vu des valeurs numériques), déterminer la conductance électrique dG de cet anneau en fonction de γ , e , dz et r_i .

- – 7. On admet que le flux $\Phi(t)$ du champ magnétique créé par l'aimant à travers ce même anneau ($\mathcal{A}$) s'écrit $\Phi(t) = \Phi_0 \frac{r_i^3}{(r_i^2 + (z + vt)^2)^{3/2}}$ où Φ_0 est une constante dont on admettra qu'elle s'écrit sous la forme $\Phi_0 = \mu_0^a M_0^b r_i^c$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Tracer l'allure de la courbe $\Phi(t)$. Déterminer les exposants a , b et c par analyse dimensionnelle.

- – 8. On pose $x = (z + vt)/r_i$. Montrer que la puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau ($\mathcal{A}$) s'écrit :

$$d\mathcal{P}_J = \frac{9\gamma e \mu_0^2 M_0^2}{2\pi r_i^4} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^5} v^2$$

- – 9. Justifier que la puissance totale dissipée par effet Joule puisse être approchée par l'intégrale :

$$\mathcal{P}_J \simeq \int_{x=-\infty}^{+\infty} d\mathcal{P}_J$$

- – 10. Tous calculs faits, on obtient $\mathcal{P}_J = K M_0^2 v^2$ où $K = 2,3$ SI. En admettant la conversion totale de l'énergie mécanique en énergie électrique lors du freinage inductif, donner l'expression littérale de la force de freinage $\vec{F}$ exercée sur l'aimant pendant sa chute, en fonction de K , M_0 et $\vec{v}$.
- – 11. Le temps de chute est $\Delta t_h = 4,0$ s pour un tube de 20 cm de haut. Quel serait le résultat de la même expérience avec un tube de même longueur en aluminium ? en acier ?
- – 12. Calculer le moment dipolaire M_0 de l'aimant utilisé.

Données numériques et formulaire

Tout n'est pas utile pour ce DS

Accélération de la pesanteur au sol	$g_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Conductivité électrique du cuivre	$\gamma_{\text{Cu}} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Conductivité électrique de l'aluminium	$\gamma_{\text{Al}} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Conductivité électrique de l'acier	$\gamma_a = 7,7 \cdot 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$
Dipôle magnétique terrestre	$\mu_T = 7,7 \cdot 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Durée d'un mois (moyen)	$30 \text{ j} = 2,6 \cdot 10^6 \text{ s}$
Durée d'une année	$365 \text{ j} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$
Intensité du champ magnétique terrestre aux pôles	$B_p = 60 \mu\text{T}$
Intensité du champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_e = 30 \mu\text{T}$
Masse volumique de l'air au sol	$\rho_0 = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Masse volumique de l'aluminium	$\rho_{\text{Al}} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6400 \text{ km}$
Viscosité dynamique de l'air	$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Facteurs de conversion	$0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$
	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

Champ magnétique créé par un dipôle magnétique placé à l'origine des coordonnées, de moment dipolaire $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_z$, en un point de coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$$