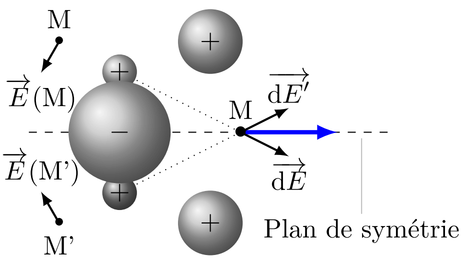
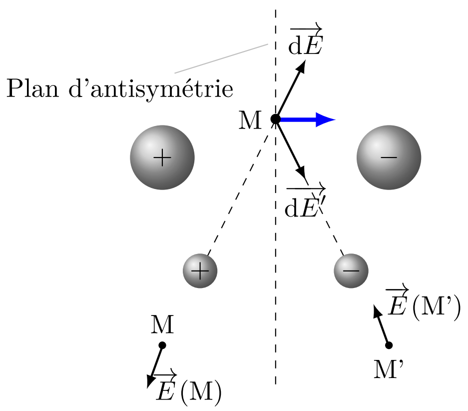
Étude d'un condensateur plan: corrigé

Partie I: cas statique

1. symétrie du champ E



antisymétrie du champ E



2. $\mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = 0$, le champ électrique est à flux conservatif.
   $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$, on en déduit l'existence du potentiel électrique V(M).

3. Les invariances par translation selon Oz et Oy de la distribution de charges indiquent que V(M)=V(x). De plus le plan yOz est un plan de symétrie des charges, V(x) est une fonction paire V(x)=V(-x).
   On a donc $\overrightarrow{E} = -\dfrac{dV(x)}{dx}\overrightarrow{e_x} = \boxed{E(x)\overrightarrow{e_x}}$. E(x) est une fonction impaire (par symétrie)

4. On applique le théorème de Gauss à la surface constituée de 2 morceaux de plans (yMz et yM'z, M' étant le symétrique de M par rapport à yOz, de surface arbitraire S). Le flux latéral est nul et par symétrie, les flux en x et -x sont identiques (un schéma est évidemment utile, celui du cours par exemple !). Il vient $2SE(x) = \dfrac{S\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(x) = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}}$
   rem l'équation locale n'est pas exploitable ici car il n'y a pas de zone $\rho \neq 0$

5. Cf le schéma du cours. Dans l'armature, par superposition, on a $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{e_x}$. En dehors, $\vec{E}$ est nul.

6. Soit Q la charge portée par l'armature positive.
   On a $Q = \sigma_0 S \underbrace{=}_{\text{aussi}} CU_c = C\int_0^e E(x)dx = C \times e \times \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 \times S}{e}}$

7. (a) On peut éventuellement refaire une analyse des symétries/invariances, mais cela n'est obligatoire à mon sens: la distribution de charge est invariante par translation selon Oy et Oz donc $V(M) = V(x)$ puis La relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V(x))$ donne $\overrightarrow{E}(x) = -\frac{dV(x)}{dx}\overrightarrow{e_x} \Rightarrow \overrightarrow{E}(M) = E(x)\overrightarrow{e_x}$ et $E(x) = -\frac{dV}{dx}$

On a toujours que le plan yOz est un plan de symétrie de charges, il l'est donc aussi pour $\overrightarrow{E}$ et donc la fonction E(x) est impaire. Restreignons donc l'étude à x positif.

• si $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ (dans la lame) ρ est non nul donc:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \quad E(x) = \frac{\rho}{\epsilon_0}x + C_1$$

E(x) est impaire donc $C_1 = 0$

$$\boxed{E(0 \leq x \leq \frac{l}{2}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}x}$$

• si $x > \frac{l}{2}$ (en dehors de la lame) $\rho = 0$ et donc $\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \quad E(x) = C_2$ déterminée par continuité avec la valeur de E(x) précédemment trouvée en x=l/2

$$\boxed{E(x \geq \frac{l}{2}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}l}$$

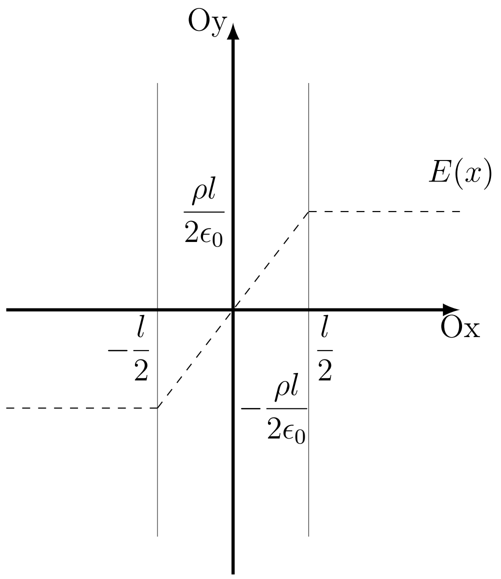
(b) On a $\frac{dV}{dx} = -E(x)$ donc

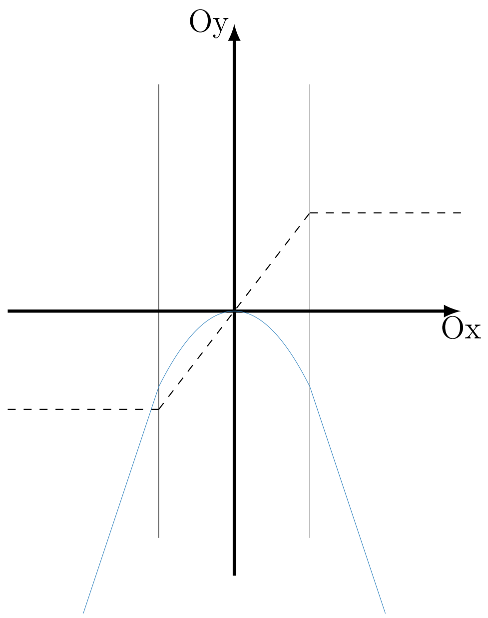
- $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$: $V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + C_3$. On peut prendre $C_3 = 0$ ce qui revient à choisir les potentiels nuls sur l'axe (de toute façon ce sont des différences de potentiel qui interviennent physiquement...)
- $x > \frac{l}{2}$: $V(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}ex + C_4$

  C_4 se détermine par continuité en $x = \frac{l}{2}$

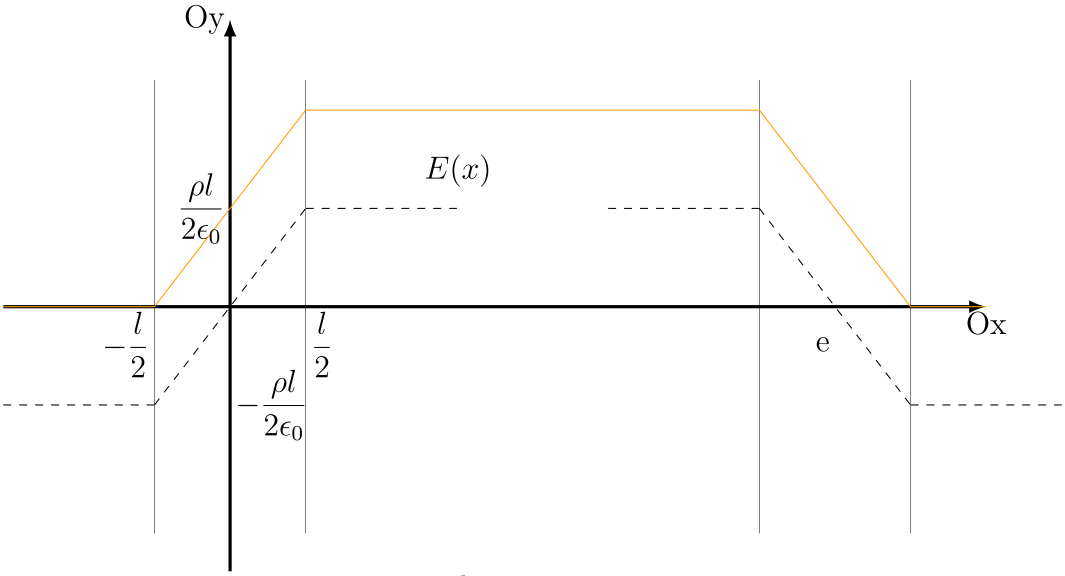
l'étude se termine par parité de V(x) déduite du fait que le plan yOz est un plan de symétrie de V(x)

Les représentations graphiques (utiles pour la question suivante) donnent (en pointillé le champ et en bleu le potentiel):





(c) Pour répondre à la question, le plus simple est d'utiliser le principe de superposition et de faire un graphe (de façon analogue donc à Q5) utilisant le graphe de gauche ci-dessus. Il vient



Dans l'armature le champ vaut $\frac{\rho l}{\varepsilon_0}$, on a donc

$$\boxed{\sigma_0 = \rho \times l}$$