

PSI 2014 - 2015*
DS N°4
10-01-2014 - Quatre heures

PREMIERE PARTIE : RESOLUTION DE PROBLEME

Il est conseillé de ne pas consacrer plus de ¾ d'heure à cette partie

L'objet de l'exercice est de répondre à la question suivante :

« Combien de temps un plongeur peut-il rester sous l'eau avant d'être en danger d'hypothermie, suivant qu'il porte ou non une combinaison ? »

Toutes les pistes explorées seront prises en compte même si elles ne conduisent pas à un résultat final chiffré.

Vous utiliserez toutes ou une partie des données suivantes :

- ✚ Température de l'eau inférieure à 20 °C
- ✚ Hypothermie chez l'homme :
 - de 35 à 34 °C : hypothermie modérée
 - de 34 à 32 °C : hypothermie moyenne
 - En dessous de 32 °C : hypothermie grave
- ✚ Energie journalière fournie par le métabolisme humain : 2400 kcal soit $1,0 \cdot 10^4$ kJ environ.
- ✚ Capacité thermique massique du corps humain : $c_{\text{corps}} = 3,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- ✚ Résistance thermique de la peau humaine pour un homme « moyen » : $3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.
- ✚ Puissances surfaciques de perte du corps humain :
 - par rayonnement = $22,8 \cdot 10^{-8} \cdot T_{\text{ext}}^3 \cdot (T_{\text{ext}} - T)$ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$,
 - par convection = $10 \cdot (T_{\text{ext}} - T)$ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$,
 - où T_{ext} est la température de l'eau environnante.
- ✚ Combinaison :
 - Epaisseurs « classiques » d'une combinaison de plongée : 3mm, 5mm, 7mm.
 - Conductivité thermique du néoprène : $0,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Vous aurez à introduire vous-même des valeurs numériques « raisonnables » pour certains paramètres non fournis ci-dessus.

Vous aurez aussi à expliquer de manière CONCISE MAIS PRECISE les étapes de votre raisonnement ; n'hésitez pas à réaliser des schémas à la fois pour vous aider et pour illustrer votre démarche.

L'objectif est de réaliser un bilan énergétique de l'homme dans l'eau :

- La température du corps va décroître à cause :
 - de la perte de puissance par rayonnement et par convection ;
 - de la diffusion thermique à travers la peau ;
 - de la diffusion thermique à travers la combinaison si le plongeur en a revêtu une.
 - La puissance produite par le métabolisme va compenser partiellement cette perte.
 - La variation de température est liée aux puissances par l'intermédiaire de la variation d'énergie interne du corps : $dU = C \cdot dT_{\text{corps}}$, où C est la capacité thermique du corps
1. Perte de puissance par rayonnement et convection : on connaît les puissances surfaciques qui sont proportionnelles à $T_{\text{ext}} - T$; connaissant la surface du corps humain, on peut associer une résistance thermique à chacune de ces pertes et les associer en //.

$$\Phi_{\text{convection}} = 10 \cdot (T_{\text{ext}} - T) \cdot S_{\text{corps}}, \text{ d'où } R_{\text{convection}} = \frac{1}{10 \cdot S_{\text{corps}}}$$

$$\Phi_{\text{rayonnement}} = 22,8 \cdot 10^{-8} \cdot T_{\text{ext}}^3 \cdot (T_{\text{ext}} - T) \cdot S_{\text{corps}}, \text{ d'où } R_{\text{rayonnement}} = \frac{1}{22,8 \cdot 10^{-8} \cdot T_{\text{ext}}^3 \cdot S_{\text{corps}}}$$

2. Pour la diffusion à travers la peau : $R_{\text{peau}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
3. Pour la diffusion à travers la combinaison : $R_{\text{combi}} = \frac{e_{\text{combi}}}{\lambda_{\text{combi}} \cdot S_{\text{corps}}}$
4. La puissance produite par le métabolisme vaut $P_{\text{méta corps}} = \frac{1,0 \cdot 10^7}{24 \cdot 3600} = 116 \text{ W}$
5. Pour avoir la capacité thermique du corps, il faut la masse du corps : $C = m_{\text{corps}} \cdot c_{\text{corps}}$

La résistance totale à prendre en compte sera donc :

$$R_{\text{éq}} = R_{\text{peau}} + (R_{\text{convection}} \cdot R_{\text{rayonnement}}) / (R_{\text{convection}} + R_{\text{rayonnement}}) + R_{\text{combi}}$$

Pour un corps d'1 m75, de masse 75 kg, on peut évaluer la surface en considérant un cylindre de hauteur 1m75 et de circonférence moyenne de 80cm, soit 1,4 m² environ

L'équation différentielle, issue du bilan énergétique, qui régit l'évolution de T s'écrit alors en supposant l'ARQS vérifiée (sinon la notion de résistance thermique n'est plus pertinente) :

$$m_{\text{corps}} \cdot c_{\text{corps}} \frac{dT}{dt} = (T_{\text{ext}} - T) \cdot \frac{1}{R_{\text{éq}}} + P_{\text{méta corps}}$$

$$\text{La résolution donne : } \tau_{\text{hypothermie}} = m_{\text{corps}} \cdot c_{\text{corps}} \cdot R_{\text{éq}} \ln \left(\frac{P_{\text{méta corps}} \cdot R_{\text{éq}} + T_{\text{ext}} - T_{\text{corps init}}}{P_{\text{méta corps}} \cdot R_{\text{éq}} + T_{\text{ext}} - T_{\text{corps hypo}}} \right)$$

On peut faire varier l'épaisseur de la combinaison ainsi que la température extérieure de l'eau d'une part et fixer le seuil d'hypothermie d'autre part ; le tableau suivant regroupe quelques résultats toutes les unités sont dans le SI sauf les durées) :

Les deux premiers tableaux correspondent à une même température d'hypothermie de 32 °C et à des températures d'eau différentes : 20 °C puis 14 °C.

Les deux suivants correspondent à $T_{\text{hypothermie}} = 35^\circ\text{C}$ et aux mêmes T_{eau}

Epaisseur combinaison	0,007	0,005	0,003	0
Température de l'eau extérieure	293	293	293	293
Température d'hypothermie	305	305	305	305
T corps initiale	310	310	310	310
R combi	0,03	0,02	0,01	0,00
R peau	0,03	0,03	0,03	0,03
R rayonnement	0,12	0,12	0,12	0,12
R convection	0,07	0,07	0,07	0,07
R équivalent	0,10	0,09	0,09	0,08
P méta	116	116	116	116
Capacité thermique	262500	262500	262500	262500
Durée (en h)	19,9	11,2	7,8	5,1

Epaisseur combinaison	0,007	0,005	0,003	0
Température de l'eau extérieure	287	287	287	287
Température d'hypothermie	305	305	305	305
T corps initiale	310	310	310	310
R combi	0,03	0,02	0,01	0,00
R peau	0,03	0,03	0,03	0,03
R rayonnement	0,13	0,13	0,13	0,13
R convection	0,07	0,07	0,07	0,07
R équivalent	0,10	0,09	0,09	0,08
P méta	116	116	116	116
Capacité thermique	262500	262500	262500	262500
Durée (en h)	4,4	3,7	3,1	2,4

Epaisseur combinaison	0,007	0,005	0,003	0
Température de l'eau extérieure	293	293	293	293
Température d'hypothermie	308	308	308	308
T corps initiale	310	310	310	310
R combi	0,03	0,02	0,01	0,00
R peau	0,03	0,03	0,03	0,03
R rayonnement	0,12	0,12	0,12	0,12
R convection	0,07	0,07	0,07	0,07
R équivalent	0,10	0,09	0,09	0,08
P méta	116	116	116	116
Capacité thermique	262500	262500	262500	262500
Durée (en h)	3,4	2,7	2,1	1,5

Epaisseur combinaison	0,007	0,005	0,003	0
Température de l'eau extérieure	287	287	287	287
Température d'hypothermie	308	308	308	308
T corps initiale	310	310	310	310
R combi	0,03	0,02	0,01	0,00
R peau	0,03	0,03	0,03	0,03
R rayonnement	0,13	0,13	0,13	0,13
R convection	0,07	0,07	0,07	0,07
R équivalent	0,10	0,09	0,09	0,08
P méta	116	116	116	116
Capacité thermique	262500	262500	262500	262500
Durée (en h)	1,4	1,2	1,1	0,8