Mines/Ponts PC 2010 modifié – Corrigé

1. particule de fluide : élément de volume $d\tau$ d'1 fluide, défini à l'échelle mésoscopique ($1\mu m^3 < d\tau < 1 mm^3$). Cette échelle, intermédiaire entre l'échelle microscopique et le macroscopique permet une description précise du fluide à l'aide de grandeurs moyennées et continues.

Système ouvert : portion de l'espace délimitée par 1 surface dite de contrôle, fixe, pouvant échanger de la matière avec l'extérieur. De tels systèmes permettent de faire des bilans dans des zones d'intérêt du fluide

Système fermé : système sans échange de matière avec l'extérieur. Ils permettent l'applicat° des théorèmes de la thermodynamique et de la mécanique

Le point de vue Eulérien est associé à 1 système ouvert : par exemple $\vec{v}(M,t)$ est la vitesse de la pdf en M (fixe) à t

Le point de vue Lagrangien est associé à 1 système fermé : on suit une particule de fluide dans son mouvement. La trajectoire est alors $\vec{OM}(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$

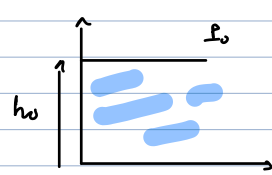
Condit° d'applicat° de la relat° de Bernoulli : écoulem^t permanent, homogène, incompressible et parfait. Dans sa formulat° la + simple, on suppose l'absence de travail mécanique échangé

rem : le référentiel d'étude sera supposé galiléen

2. Le débit (volumique) moyen étant constant, on a : $V = h_0 L^2 = D_v . t$

$$h_0 = \frac{D_v . t}{L^2} = 0,55 \text{ m.}$$

3. Suite au remplissage sur une hauteur h_0



on a : $\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g$ en tout point du réservoir

$\Rightarrow P = cst - \rho_0 g z = P_0 + \rho_0 g (h - z) = P(z)$

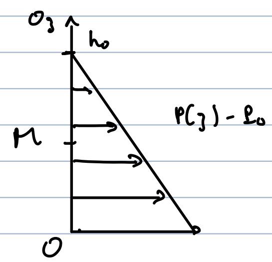
En isolant par la pensée un élément de surface dS d'1 flanc vertical du réservoir

on a : $\vec{df_p} = \vec{df_{eau}} + \vec{df_{air}} = (P(y) - P_0)\,dS\,(+/- \vec{e_y})$ (selon Oy)

$$F_p = \int_0^{h_0} \rho_0 g (h-y)\,dy \times L = \rho_0 g L \frac{h_0^2}{2} = 2000\ N$$

les forces sur les autres faces ont la même norme et sont dirigées selon la normale sortante au flanc

4.



Calculons le moment en O de $\vec{df_p} = \rho_0 g (h-y) L dy$

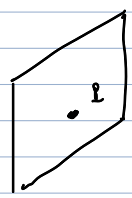
$\|d\vec{\mathcal{M}}_0\| = \|\vec{OM} \wedge d\vec{f_p}\| = \rho_0 g (h-y) L y\,dy$

$\|\vec{\mathcal{M}}_0\| = \int_0^{h} \rho_0 g L (h-y) y\,dy = \rho_0 g L \left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{h_0}$

$= \rho_0 g L \frac{h_0^3}{6}$

Le point d'applicat° P est tel que : $\|\vec{OP} \wedge \vec{F_p}\| = \|\vec{\mathcal{M}}_0\| \Rightarrow OP = h_0/3$

Ceci est sa hauteur. Par symétrie, il est situé (longitudinalem^t) au milieu de la face



rem : je ne me suis pas intéressé à la direct° du moment

l'étude est valable pour les 4 faces.

5. Hors Prog. PSI

6. Hyp des GP : $\underbrace{P_0 V_0 = nRT_0}_{\text{remplissage}}$ et $\underbrace{P_i V_0 = nRT}_{\text{début de la vidange}}$ $\quad \frac{P_i}{T} = \frac{P_0}{T_0} \Rightarrow P_i = \frac{T P_0}{T_0}$

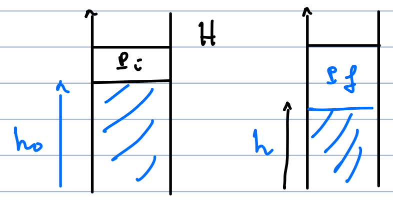
$= 1{,}1\ 10^5$ Pa

l'eau du réservoir étant en surpression, à l'ouverture du bouchon de vidange, le réservoir va se vider. Au fur et à mesure de la vidange, l'air contenu dans le réservoir subit une détente isotherme.

la vidange s'arrête si la pression au fond du réservoir vaut P_0

Selon Q3 (l'eau est en équilibre) $P_f = P_0 - \rho g h$

Explicitons le caractère isoT de l'évolut° : $P_f V_f = P_i V_i$



$\rho_f L^2 (H-h) = \rho_i (H-h_0) L^2$

$(P_0 - \rho_0 g h)(H-h) = (H-h_0) P_i$ éq. second degré.

AN : $h = 64$ cm $(< H)$

Le volume vidangé est donc : $(h_0 - h)L^2 \simeq 9L$ et $P_f = 0.92$ bar

Concernant le bouchon de remplissage, il y a du coup une force due à la dépression donnée par : $F = (P_0 - P_f)\pi (D/2)^2 \simeq 560$ N

Pour ouvrir le bouchon, il faut soulever 57 kg !

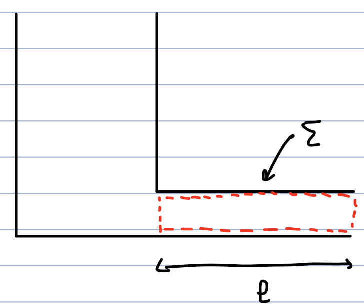
7. L'écoulement est selon $-\vec{e_x}$ et $\vec{v}$ supposé uniforme sur chaque sect° : $\vec{v} = -v(x,t)\vec{e_x}$

(pas de turbulences)

Écoulement incompressible : $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{v}(M,t) = -v(t)\vec{e_x}$

8. Notons que selon Q1, le régime étant non stationnaire, la relat° de Bernoulli n'est PAS applicable

Mais on va reprendre la démarche de la démo



$\Sigma(t)$ = Syst. fermé entre $-L$ et $-L+\ell$

Pdt dt, $dE_c(t) = \delta W_{\vec{f}nc} + \delta W_{pres}$ car $g_{pa} \ll 1$

• $\delta W_p = \frac{(P_e - P_s)\,dm}{\rho} = \frac{P_0 + \rho_0 g h - P_0}{\rho}\, S v dt\, \rho$

cf cours $= \rho_0 g h v dt S$

$E_p = cst$ car $z = cst$ vitesse $\ll$ $dm = \rho_0 S v dt$

• $dE_c = dE_{c,c} + \delta E_{c,s} - \delta E_{c,e} = dE_{c,c} + \frac{1}{2}\delta m v_{sortie}^2 - 0$

partie commune

$= \frac{1}{2} m (v^2(t+dt) - v^2(t)) + \frac{1}{2}\rho_0 S v^3 dt$ (*)

$= \underbrace{\ell S \rho}_{m} (v\, dv) + \frac{1}{2}\rho_0 S v^3 dt$

(*) $v(t+dt) = v + dv$
$v^2(t+dt) = v^2 + 2v\,dv$

Il vient : $\ell S \rho_0 v\, dv + \frac{1}{2}\rho_0 S v^3 dt = g_0 h v\, dt S$

(1) $\boxed{\ell \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = g_0 h}$ $k^2 = g_0 h.$

9. $V_0 = \sqrt{2 g_0 h}$ (1) $\Rightarrow \ell \frac{dv}{dt} + \frac{v^2 - V_0^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{V_0^2 - V^2} = \frac{dt}{2\ell}$

Or : $\frac{1}{V_0^2 - V^2} = \left(\frac{1}{V_0 + V} + \frac{1}{V_0 - V}\right)\frac{1}{2V_0} \Rightarrow \frac{dv}{V_0 + v} + \frac{dv}{V_0 - v} = \frac{v_0\, dt}{\ell}$

on $\int$: $[\ln(v_0 + v)]_0^v - [\ln(v_0 - v)]_0^v = \frac{v_0 t}{\ell}$

$\ln\left(1 + \frac{v}{v_0}\right) - \ln\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) = \frac{v_0 t}{\ell} \Rightarrow \frac{1 - v/v_0}{1 + v/v_0} = e^{-v_0 t/\ell} = e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \ell / v_0$

on trouve : $v(t) = v_0 \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}} \Rightarrow v_l = v_0$

10. AN : $\tau = 0{,}22$ s et $t_0 / v(t_0) - v_0 = 0{,}01\, v_0 \Rightarrow t_0 = \tau \ln(199) = 1{,}2$ s

11. On suppose que $t_v \gg t_0$, de sorte que $v(t) \simeq v_l$ durant le vidange

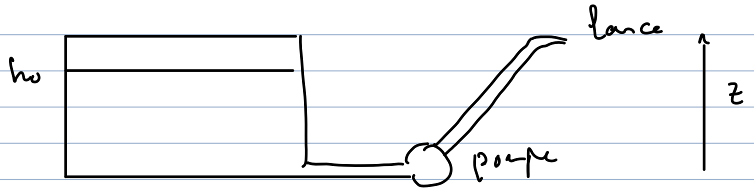
alors : $D_v . t_v = V_0 \rightarrow t_v = \frac{h_0 L^2}{\delta v_0} \simeq 523$ s $\gg t_0$ (hyp. de départ ok)

12. Quest de cours théorème de Bernoulli avec parties mobiles, exprimé en puissance

$\Delta_e^s \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z\right) = w_i$ (à démontrer)

$\times D_m = \rho D_v \Rightarrow \mathcal{P} = \rho D_v\, \Delta_e^s \left(\frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho}\right)$

13. Appliquons la relat° précédente entre le sommet du réservoir et la sortie de la lance :



↳ $v_s = D_v . S^{-1} = \frac{4 D_v}{\pi d_2^2} \gg v_e \simeq 0$ ($L^2 v_e = \delta v_s$)

↳ $P_e = P_s = P_0$
(au contact de l'air)

↳ $z_s = z$ et $z_e = h$

Il vient : $\mathcal{P} = \rho D_v \left(\frac{8 D_v^2}{\pi^2 d_2^4} + (z - h_0)\right)$

résolut° numérique : $D_v = 3$ L.s^{-1}

Enfin : $v_{max} = \frac{4 D_v}{\pi d_2^2} = 19{,}6$ m.s^{-1} et $v = \frac{4 D_v}{\pi d_1^2} = 3.7$ m.s^{-1}

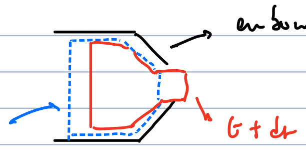
14. $Re = \rho \frac{v d_1}{\eta} \simeq 118400 \Rightarrow$ écoulem^t turbulent

15. On lit sur le diagramme un coefficient de pertes : $f \simeq 0{,}022$

Soit une perte de charge : $\Delta P = f \, \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\ell}{d} = 2{,}3$ bar

il vient : $\mathcal{P}_{supl} = D_v \Delta P = 690$ W à reporter au 1170.

16. effectuons un bilan de $\vec{p}$ au système suivant : l'eau dans la zone pointillée que l'on suit pendant dt



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v_s} - \vec{v_e}) = \sum \vec{F_{ext}}$$

En project° sur Ox : $D_m(v_s - v_e) = F_{embout \to eau} + F_{pression \to eau}$

$F_{eau \to embout} = D_m(v_e - v_s) + (P_e S_e - P_s S_s)$ $\quad \rightarrow P_e \quad \leftarrow P_s$

↳ $P_s = P_0$ car l'eau est au contact de l'air

↳ P_e se détermine par Bernoulli entre e et s

$$P_s - P_e + \rho\left(\frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2}\right) \underset{\uparrow z = cst}{=} 0 \Rightarrow P_e = P_0 + \frac{\rho}{2}(v_s^2 - v_e^2)$$

↳ ve et vs se déterminent par Dv :

Or selon Q13 : $D_v = S_e v_e$, $D_v = S_s v_s$ $\Rightarrow \begin{cases} v_e = \frac{4 D_v}{\pi d_1^2} \\ v_s = \frac{4 D_v}{\pi d_2^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_e = 3{,}7 \text{ m.s}^{-1} \\ v_s = 19{,}5 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$

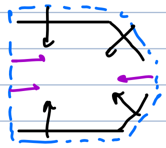
Au final :

$$\underbrace{F_{eau \to embout}}_{\text{force à calculer}} = \rho_0 D_v (v_e - v_s) + \frac{P_0 \pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) + \rho_0 \frac{\pi d_1^2}{8}(v_s^2 - v_e^2)$$

AN : $F = 170$ N (selon $+\vec{u_x}$)

17. Déterminons l'ensemble des forces exercées par l'eau et l'air sur l'embout

$\mathcal{S} = \{embout\}$ $\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F_{ext}} = m\vec{g} + F_{pression, air \to \mathcal{S}} + \underbrace{F_{eau \to \mathcal{S}}}_{\text{cf Q16}}$



$\mathcal{S}_{fictif} = \{$ air autour complétant $\mathcal{S}\}$

$$P = P_0 \Rightarrow \iint_{\mathcal{S}_f} P_0 \, \vec{dS} = \vec{0} \qquad \left(\iint_S P_0 \, \vec{dS} = \iiint_V \vec{\text{grad}}(P_0) \, d\tau \right)$$

$$\underbrace{\iint_{\text{surf. en bout}} P_0 \, \vec{dS}}_{\vec{F}_{pression, air \to \mathcal{S}}} + \underbrace{\iint_{2 \text{ extrémités}} P_0 \, \vec{dS}}_{(-P_0 S_s + P_0 S_e)\vec{u_x}} = \vec{0} \Rightarrow F_{pression, air \to \mathcal{S}} = -P_0 S_e + P_0 S_s$$

$$F_{fluide \to \mathcal{S}} = \rho_0 D_v (v_e - v_s) + \rho_0 \frac{\pi d_1^2}{8} (v_s^2 - v_e^2) = 100 N$$

18. problème de chute libre

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 0 \\ \ddot{z}' = -g \end{cases} \xrightarrow{\int} \begin{cases} z'(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_s \sin(\alpha) t + z_0' \\ x'(t) = v_s \cos(\alpha) t \end{cases}$$

$$z'(x') = -\frac{g}{2 v_s^2 \cos^2(\alpha)} x'^2 + \tan(\alpha) x' + z_0' \quad \Rightarrow \underline{\text{parabole}}$$