

## DS N°3 - 10/12/2022 - Corrigé

### PREMIER PROBLEME

#### I Étude de l'écoulement du pétrole dans l'oléoduc

##### I.A - Préliminaires

Q 1. Le débit volumique vaut 1 million de barils/jours, soit en  $m^3/s$  :

$$D_v = \frac{0,159 \cdot 10^6}{24 \times 3600} = 1,84 m^3 \cdot s^{-1}$$

Q 2. En utilisant la relation  $D_v = S v_m$ , on en déduit la vitesse moyenne du pétrole dans l'oléoduc :

$$v_m = \frac{D_v}{S} = \frac{4 D_v}{\pi d^2} = \frac{4 \times 1,84}{\pi \times 1,07^2} = 2,05 m \cdot s^{-1}$$

R : Si on utilise le plus petit diamètre près de Ceyhan, on obtient  $3,1 m \cdot s^{-1}$ .

Q 3. Lors de la première injection, le pétrole a parcouru  $1776 km$  en 18 jours, soit une vitesse égale à :

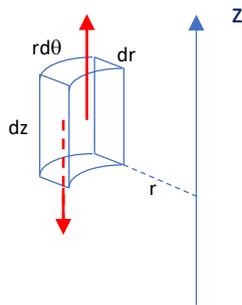
$$\frac{1776 \cdot 10^3}{18 \times 24 \times 3600} = 1,14 m \cdot s^{-1}$$

Sans doute la première injection ne correspondait-elle à une pleine charge, d'où un débit plus faible (pour des raisons de sécurité ?).

Q 4.

- a- Le pétrole a une masse volumique de  $800 kg/m^3$  et une viscosité de  $0,2 Pa \cdot s$  ; la vitesse est d'environ  $2 m/s$  pour un diamètre d'environ  $1 m$  :  $R_e = 8000$  : on est un peu au-delà de la limite usuellement choisie pour un écoulement laminaire, qui permettrait de proposer un écoulement suivant  $z$  seulement.
- b- L'écoulement est stationnaire :  $v$  ne dépend pas de  $t$  ; il est invariant par rotation suivant  $z$  :  $v$  ne dépend pas de  $\theta$  ; il est incompressible :  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , donc  $v$  ne dépend pas de  $z$ .

Q 5. - L'accélération locale est nulle car le régime est stationnaire ; le terme d'accélération convective se réduit à  $v_z(r) \frac{\partial v_z(r)}{\partial z} \vec{e}_z$ , car  $v_r$  et  $v_\theta$  sont nuls ; comme  $v_z$  n'est pas fonction de  $z$ , l'accélération convective est nulle.



La particule subit les actions de cisaillement -  $\eta \frac{dv}{dr}(r) * rd\theta dz$  en  $r$  et

+  $\eta \frac{dv}{dr}(r + dr) * (r+dr)d\theta dz$  (attention  $\frac{dv}{dr} < 0$ ),

soit une résultante :  $\eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) * dr d\theta dz$ , ou encore  $\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) * dr \tau$ .

Q 6. On applique ensuite la relation fondamentale de la dynamique à la particule de fluide en négligeant la pesanteur comme l'indique l'énoncé :

- Sur  $r$  et  $\theta$  :  $0 = \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$ , donc  $P(z)$  uniquement.
- Sur  $z$  :  $0 = - \frac{dP}{dz} * d\tau + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) * d\tau$ , ou encore  $\frac{dP}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$  ; dans cette équation le membre de gauche n'est fonction que de  $z$ , le nombre de droite que de  $r$  et l'égalité est vraie pour tout  $z$  et tout  $r$  pouvant varier indépendamment l'un de l'autre : chaque membre est donc égal à une même constante.

$\frac{dP}{dz} = \text{cte} = - \frac{\Delta P}{l}$ , avec les notations de l'énoncé ; et donc  $- \frac{\Delta P}{l} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$  ; en intégrant et en remarquant

que la dérivée de  $v$  par rapport à  $r$  doit rester bornée, il vient bien la relation cherchée avec  $K = \frac{\Delta P}{2\eta l}$

Q 7. En séparant les variables, il vient :

$$dv = -K r dr$$

En intégrant entre  $R$  et  $r$ , on obtient :

$$v(r) = \frac{K}{2} (R^2 - r^2) \quad , \text{ avec la Condition d'adhérence : } v(R) = 0.$$

Q 8. Le débit volumique est donné par :  $\iint_{\text{section}} \vec{v} \cdot \vec{dS}$ , la section étant un disque de rayon  $R$ , orthogonal à  $z$

$$\begin{aligned} D_v &= \int_0^R \frac{K}{2} (R^2 - r^2) 2\pi r dr \\ &= \int_0^R K (R^2 - r^2) \pi r dr \\ &= K \pi \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \\ &= K \pi \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{P_1 - P_2}{8 \eta \ell} \pi R^4 \end{aligned}$$

Il vient :

$$P_1 - P_2 = \frac{8 \eta \ell}{\pi R^4} D_v = R_H D_v$$

On obtient ainsi :

$$R_H = \frac{8 \eta \ell}{\pi R^4}$$

Q 9.  $R_H$  correspond à une résistance à l'écoulement.

La loi d'Ohm est analogue :  $U = V_2 - V_1 = R I$ . La loi donnant la résistance thermique l'est aussi.

### I.C - Diminution de la pression dans l'oléoduc - Compensation par des pompes

Q 10. : Nous avons vu que  $\frac{dP}{dz} = -\frac{\Delta P}{l}$ , donc en utilisant la relation ci-dessus :

$$P_1 - P_2 = \frac{8 \eta \ell}{\pi R^4} D_v = R_H D_v$$

avec  $D_v = \pi R^2 v_m$  :

$$P_2 - P_1 = -\frac{8 \eta \ell}{\pi R^4} \pi R^2 v_m$$

Pour une longueur  $dz$  à la place de  $\ell$ , il vient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{8 \eta}{R^2} v_m$$

Q 11. Cette diminution de pression s'appelle une perte de charge régulière.

D'autres causes possibles sont les obstacles (coudes, modifications de la géométrie de la conduite, robinets, ...) : ce sont des pertes de charge singulières.

Q 12. Application numérique :  $\frac{dP}{dz} = -12,8 Pa.m^{-1}$ .

Q 13. Entre le point de départ et le point d'arrivée, on aurait ainsi une diminution de pression de  $12,8 \times 1776.10^3 = 227.10^5 Pa = 227 bar$ .

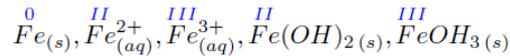
Q 14. La variation de pression vaut  $\Delta P = 40 bar = 4,0.10^6 Pa$ , ce qui correspond à une distance de  $\frac{4,0.10^6}{12,8} = 312,5 km \simeq 3,1.10^2 km$ . Théoriquement, il faudrait donc 6 pompes. Ce nombre est sous-évalué en raison des pertes de charges singulières, des vannes d'arrêt, des fuites éventuelles, ...

Q 15. On écrit la relation de Bernoulli généralisée avec une même altitude d'arrivée et de départ et une même vitesse (section constante, débit volumique constant, fluide incompressible), en tenant compte uniquement de la différence de pression :  $D_v \Delta P = \mathcal{P}_{indiquée}$ . On obtient alors environ 7,4 MW, ce qui est très important.

## II Problèmes liés à l'enfouissement de la conduite

### II.A - Protection contre la corrosion

Q 16. Les nombres d'oxydation sont les suivants :

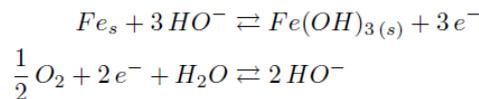


Q 17. Les espèces sont placés de bas en haut par degré d'oxydation croissant et de gauche à droite en gagnant en ions hydroxydes  $OH^-$  en raison du  $pH$  qui augmente. Il vient ainsi :

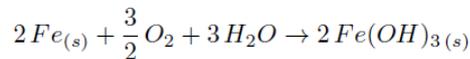
A	B	C	D	E
$Fe_{(aq)}^{3+}$	$Fe(OH)_{3(s)}$	$Fe_{(aq)}^{2+}$	$Fe(OH)_{2(s)}$	$Fe_{(s)}$

Q 18. Le fer ne possédant pas de domaine commun avec cette espèce, il n'est pas stable dans l'eau.

Q 19. En  $pH$  neutre, on a les demi-équations suivantes car la présence de dioxygène impose d'être au degré  $III$ . :



D'où l'équation de la réaction :



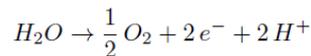
Q 20. Il faut éviter que le fer joue le rôle d'anode, sinon, il se corrode car il y a oxydation sur cette électrode. Il doit donc jouer le rôle de cathode où a lieu une réduction.

Le courant imposé circule bien effectivement positivement de la cathode à l'anode dans le circuit extérieur et impose donc une réduction sur la conduite

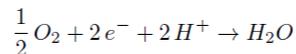
Q 21. Le potentiel du couple  $Fe(II)/Fe$  reste constamment au-dessus de la valeur  $-800$  mV, quel que soit le  $pH$  : Le fer est donc toujours dans sa zone d'immunité.

Q 22. Le sol contient de l'oxygène et de l'eau.

- A l'anode, la seule réaction possible est l'oxydation de l'eau (l'anode est inattaquable) :



- A la cathode, on peut envisager la réduction de l'eau ou celle de  $O_{2(dissous)}$  ; comme le  $pH$  vaut environ 8 et que la surtension cathodique du couple  $H_2O/H_2$  sur une conduite en fer est d'environ  $-0,5$  V, le potentiel nécessaire à l'obtention de  $H_2$  doit donc être inférieur à  $-0,06 \cdot 8 - 0,5$  V, qui est inférieur à la valeur imposée. On peut alors penser que la réaction principale à la cathode sera :



Q 23. Elles représentent les lignes de courant dans le sol. Celui-ci peut être assuré notamment par le transfert d'ions  $H^+$  de l'anode à la cathode (cf. ci-dessus) et par la migration d'anions présents dans le sol.

## DEUXIEME PROBLEME : Le feu et l'eau

35 1<sup>er</sup> est 1 kg d'eau au cœur de l'évolutif itérative

$$\Delta H = m C_{H_2O(l)} (T_{el} - T_c) + m \Delta_{vap} H^\circ + m C_{H_2O(g)} (T_f - T_{el})$$

On souhaite déterminer l'énergie  $E$  pour qu'une masse  $m=1$  se vaporise

$$E = C_{H_2O(l)} (T_{el} - T_c) + \Delta_{vap} H^\circ + C_{H_2O(g)} (T_f - T_{el})$$

$$= 3907 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

36.  $D_n = \rho D_v \Rightarrow P_{utile} = \frac{1}{3} D_n E = 11 \text{ MW/lance}$  : il faut environ 136 lances  
 ↳ quasi parcs éoliens

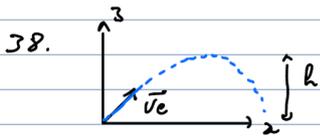
37. 1 lance produit 167 kg par minute de vapeur d'eau ( $\frac{1}{3}$  de suv)

soit  $9,2 \cdot 10^2 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$  ( $\text{MHW} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

avec la loi de CL:  $PV = nRT \Rightarrow V = 825 \text{ m}^3/\text{min}$

↳ 800°C

### III D. Lances & incendie



le mur de l'eau dans l'air est, très approximativement,  
 une parabole (frottement/air  $\ll$ )

Par conservation de  $E_m$ , on a:  $\frac{1}{2} m (V_{ex}^2 + V_{ey}^2) = mgh + \frac{1}{2} m V_{ex}^2$

$V_{ey} = \sqrt{2gh}$  je prends  $h = 20 \text{ m} \Rightarrow V_{ey} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\alpha$  : angle initial  $\approx 45^\circ \Rightarrow V_{ex} = V_{ey} \Rightarrow V_e = \sqrt{2} V_{ey} = 2\sqrt{gh} = 28 \text{ m/s}$

39. la vitesse dans le tuyau est  $v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 2.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  très inférieure à  $V_e$

Il y a 1 injecteur à la sortie de la lance

pour augmenter la vitesse

40. En appliquant le th. de Bernoulli entre la sortie de la pompe et l'extrémité de la lance (les hypothèses nécessaires sont vérifiées)

il vient:  $P_p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z_p = P_l + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z_l \Rightarrow \Delta P = \rho g (z_l - z_p) = 2.9 \text{ bar}$

↳ on se place juste avant l'éventuel injecteur

41.  $Re \hat{=} \rho \frac{dV}{\mu} = 1.5 \cdot 10^7 \rightarrow$  l'écoulement est turbulent

42.  $f$  est sans dimension  $\Delta P \text{ lin} = \text{bar} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\rho v^2 = E_{cinétique} = \text{pression}$

43. Je dirais non car  $\Delta P \propto L$  (environ...)

44.  $Re = 1.5 \cdot 10^7 \Rightarrow$  nous sommes dans le cadre de la lance de 40.

Pour déterminer  $\epsilon_d$ , la rugosité relative, il nous faut la valeur de  $f$  et il faut pour cela exploiter le tableau 2

formule de Darcy-Weisbach:  $J = f \frac{\rho v^2}{2} \frac{1}{d} \Rightarrow \Delta C_p = f \frac{\rho v^2}{2} \frac{L}{d}$

↳ perte de charge linéique

↳ perte de charge totale régulière (en press)

donc  $\Delta C_p = f(L)$  est la droite de pente  $f \frac{\rho v^2}{2d} = 1$

$$D_e + R_e = \frac{\rho d v}{\rho d} \Rightarrow v = \frac{R_e \rho}{\rho d} \Rightarrow \rho \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2\rho} \left( \frac{R_e \eta}{d} \right)^2$$

La pente vaut donc :

$f \frac{1}{d} \frac{1}{2\rho} \left( \frac{R_e \eta}{d} \right)^2$  ;  $d = 0,070$  m,  $Re = 1,5 \cdot 10^5$ ,  $\eta = 10^{-3}$  Pa.s,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup> ; et d'autre part, la valeur du débit permet de trouver la valeur de la pente de la droite :

Débit 500 l/min, la pente vaut : 550 Pa.m<sup>-1</sup> →  $f = 1,7 \cdot 10^{-4}$

on trouve alors :  $\frac{\xi}{d} = 3,3 \cdot 10^{-4}$  →  $\xi = 23 \mu\text{m}$  ⇒ bryan peu rugueux

Rem : Nous avons modifié le sujet original qui proposait  $5 \cdot 10^5$  pour  $Re$  en choisissant un débit de 1500 l/min, en dehors des données du tableau :  $1,5 \cdot 10^5$  est + logique, nous semble-t-il

45. Il faut rajouter la forme compensant la perte de charge régulière au terme calculé à Q40.

pour 1 débit de 700 l.min<sup>-1</sup>  $\Delta P = 1,1 + 2,9 = 4$  bar

*570 x 200*  
*partie utile*  
*perte de charge*

Il faut aussi tenir compte des pertes de charge singulières : raccordement, coudes, pompe ...

46. Le M. de Bernoulli généralisé (c'est avec parties mobiles et pertes de charge) appliqué entre l'entrée de la pompe et la lance, s'écrit

$$\Delta_e \left( \frac{P}{\rho} + \rho g z \right) + \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{P_i}{\rho} - \Delta C_p$$

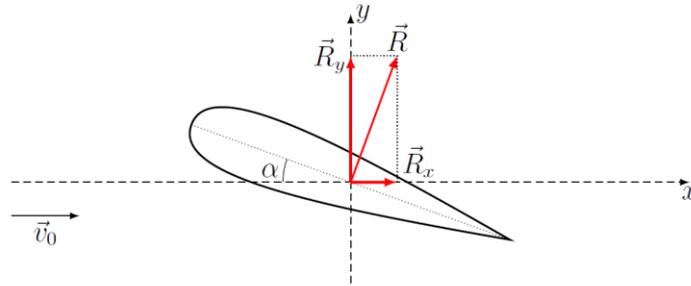
$$\Rightarrow P_i = \rho v \left( \underbrace{\Delta C_p}_{1,1} + \underbrace{P_e - P_p}_5 + \underbrace{\rho g (z_e - z_p)}_{2,9} \right) = 7,9 \text{ kW}$$

47 Il suffit de multiplier ...  $V = 1080 \text{ m}^3$

## TROISIEME PROBLEME : Vol d'un AIRBUS

### 1.1 Éléments de description d'une aile

Q1 -



Q2 - Vol de croisière à pente et assiette nulle :  $\alpha = \beta = 3^\circ$ , Le mouvement de l'avion est rectiligne et uniforme donc son accélération est nulle. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, il subit l'action du poids, de la poussée, de la traînée et de la portance aérodynamiques exercées par l'air (supposé immobile dans le référentiel terrestre) sur les deux ailes.

Le mouvement étant horizontal, la traînée est également horizontale et la portance est verticale.

bilan des forces :

- poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$  ;
- poussée  $\vec{F} = F\vec{e}_x$  ;
- portance  $\vec{R}_y = \frac{1}{2}\rho S v_0^2 C_y(\alpha)\vec{e}_y \times 2$
- traînée  $\vec{R}_x = \frac{1}{2}\rho S v_0^2 C_x(\alpha)\vec{e}_x \times 2$

La seconde loi de Newton appliquée à l'avion s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}_x + \vec{R}_y$

On projette l'équation du mouvement :

$$\text{sur } \vec{e}_x : -F + \rho S v_0^2 C_x(\alpha) = 0 \quad ; \quad \text{sur } \vec{e}_y : -mg + \rho S v_0^2 C_y(\alpha) = 0$$

— équation de sustentation :

$$mg = \rho S v_0^2 C_y(\alpha)$$

— équation de propulsion :

$$F = \rho S v_0^2 C_x(\alpha)$$

Q3 - Applications numériques : pour un calage  $\alpha = 3^\circ$ , on lit sur la figure 2

$$C_x = 0,02 \quad ; \quad C_y = 0,35$$

**rem** la valeur lue pour  $C_y$  influe fortement le calcul, les valeurs entre 0,25 et 0,4 me semblent acceptables.

On trouve donc

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg}{\rho S C_y}} = 2,0 \times 10^2 \text{ m.s}^{-1} \simeq 700 \text{ km/h}$$

La poussée est donnée par le rapport des deux expressions

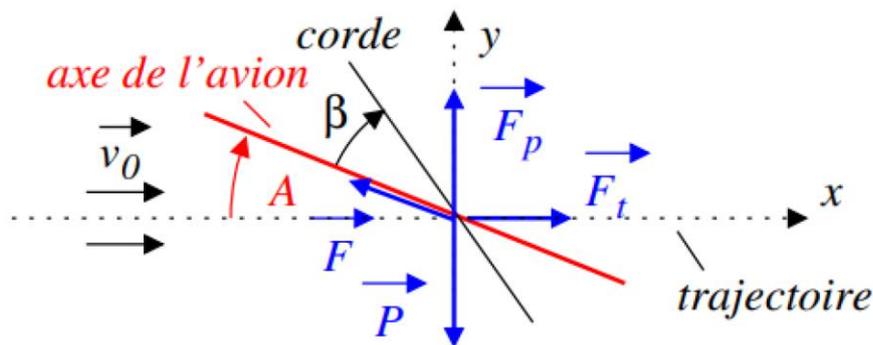
$$F = mg \frac{C_x}{C_y} = 3,4 \times 10^4 \text{ N}$$

### 1.2 Rôle des ailes

Q4 - Qualitativement l'extrados est soumis à une dépression et l'intrados à une surpression. La pression sous l'aile étant supérieure à la pression au-dessus de l'aile, la résultante des forces de pression sur l'aile crée une force de portance.

Q5 - Les deux courbes sont confondues pour une incidence nulle car l'aile est symétrique. Donc la résultante des forces de pression est alors nulle et la portance aussi.

**Q6 - a)** Faisons un schéma (avec des angles accentués pour raison de lisibilité). En notant  $A$  l'assiette on a  $\alpha = \beta + A$ .



Avec toujours une accélération nulle, on a à présent (en projection sur Ox et Oy)

$$F_t = F \cos A \Rightarrow \rho S C_x v_0^2 = F \cos A$$

$$mg = F_p + F \sin A = F \sin A + \rho S v_0^2 C_x$$

b) Si l'assiette est non nulle alors  $\alpha \neq \beta$ . Si on augmente celle-ci, alors  $\alpha$  augmente aussi jusqu'à sa valeur maximale d'environ  $14^\circ$ , correspondant donc à une vitesse minimale car le produit  $v_0^2 \times C_y$  est une constante.

**Q7,8,9** - En toute rigueur l'expression de Q.3 donnant la vitesse en fonction de l'angle d'incidence n'est plus valable car  $\alpha \neq \beta$ .

On déduit des deux équations de Q6a)

$$v_0^2 \rho S (C_y + C_x \tan A) = mg$$

Avec  $C_{y,max} = 1.6$  on trouve  $\alpha_{max} = 14^\circ$  et donc  $A_{max} = 11^\circ$

ce qui donne numériquement pour  $\alpha_{max}$  :  $C_x \tan A \simeq 6 \times 10^{-3} \ll 1,6 = C_{y,max}$

$$v_{0,min} = \sqrt{\frac{mg}{\rho S C_{y,max}}} \simeq 92 m.s^{-1} = 330 km/h$$

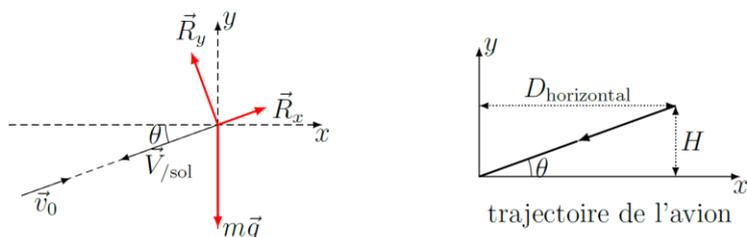
**Q10** - L'avion doit ralentir avant l'atterrissage pour pouvoir freiner et s'arrêter sur la longueur de la piste que l'on souhaite aussi la plus courte possible. Pour assurer une descente douce (quasi-compensation des forces), le pilote doit cabrer l'avion pour maintenir une portance significative à vitesse réduite.

**Q11** - La vitesse minimale obtenue aux questions précédentes ne respecte pas le critère de sécurité énoncé. Il faut donc modifier l'aile. Les bords et volets permettent à la fois d'augmenter la portance via l'augmentation du  $C_y$  et aussi de retarder le décrochage en augmentant la valeur de  $\alpha_{max}$ .

Avec les bords seuls, on trouve -en utilisant la relation de Q7- une vitesse minimale de 300 km/h ( $C_{y,max} \simeq 2$ ) ce qui est trop, d'où l'usage des volets pour avoir une vitesse minimale de 240 km/h ( $C_{y,max} \simeq 3,2$ ) , conforme au critère .

### 1.3 Le vol plané

**Q12** - Faisons un schéma clair :



La vitesse est constante, donc l'accélération nulle : la seconde loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{0} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + m\vec{g}$$

La projection sur l'axe horizontal permet d'éliminer le poids de l'avion :

$$R_x \cos \theta = R_y \sin \theta$$

et les expressions de la portance et de la traînée conduisent à la relation

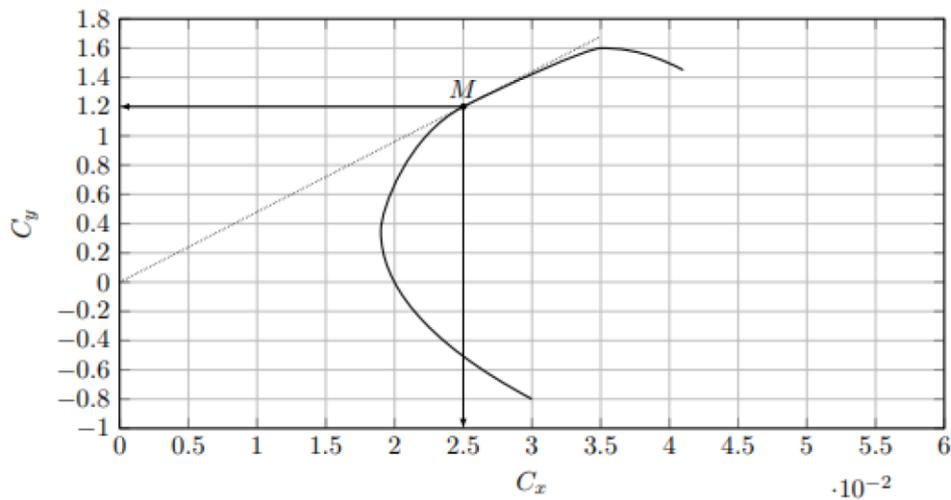
$$\frac{1}{2}\rho S v_0^2 C_x \cos \theta = \frac{1}{2}\rho S v_0^2 C_y \sin \theta$$

qui se simplifie en

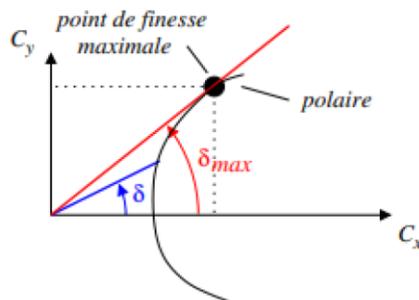
$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = f = \frac{C_y}{C_x}$$

car  $\tan \theta = H/D = 1/f$

**Q13** - Le rapport  $C_y/C_x$  est la pente de la droite tracée depuis l'origine (0,0) jusqu'au point de la polaire correspondant à l'incidence.



La finesse est maximale lorsque cette pente est maximale, donc lorsque la droite reliant (0,0) à un point M de la polaire est tangente en ce point à la polaire (avec  $C_y > 0$  pour avoir une portance dirigée vers le haut).



**Q14** - On lit graphiquement  $C_y = 1,2$ ,  $C_x = 2,5 \times 10^{-2}$  soit  $f = 48$

**rem** cette valeur est fortement surévaluée, les valeurs typiques sont plutôt de l'ordre de 20-25 (comme expliqué à Q.16)

**15** - La distance horizontale maximale parcourue est alors de l'ordre de 48 km pour une hauteur de chute de 1 km.

**Q16** - Seules les ailes contribuent notablement à la portance (c'est leur rôle), tandis que tous les éléments de l'avion contribuent à sa traînée : lorsque l'ensemble de l'avion est considéré,  $C_x$  est plus élevé pour une valeur sensiblement identique de  $C_y$ , donc la finesse est plus faible.