

CENTRALE PSI 2007
CORRECTION DE LA PARTIE
DIFFUSION

①

II.A. Aspect thermique

① Densité de courant thermique ; $W m^{-2}$.

②③ Bilan thermique sur une tranche dx
+ Fourier : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$ et $D = \frac{K_a}{\rho c_a}$

④ Iréversibilité

⑤ 1. $T(x, 0) = T_0$: - équilibre thermique
sur toute la hauteur de la couche d'argile à
 $t=0$.

- Contact parfait en $x=l$
à $t=0$ puis à tout t :

2. $T(l, t) = T_0$: contact parfait en $x=l$
 $\forall t$.

3. $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = - \frac{N p(t)}{2 \pi a S}$ que l'on

peut écrire $- K_a \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot S = - \frac{N}{2} p(t)$

Flux thermique de $\vec{J}_h$ donne

puissance en $x=0$

De + pour un colis la puissance

dégagée est $p(t)$, pour N colis elle vaut $N p(t)$. Comme les colis cèdent de la puissance vers le haut et vers le bas, la puissance cédée en $x=0$ est $\frac{N}{2} p(t)$.
L'équation $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = - \frac{N}{2} \frac{p(t)}{K_a S}$ est donc l'équation de continuité de flux thermique en $x=0$, $\forall t$.

⑥

(1) $\equiv 40 \text{ ans}$
(2) $\equiv 10 \text{ ans}$
(3) $\equiv 100 \text{ ans}$

cf. annexe pour les courbes et l'évolution de $T(0, t)$.

En effet :

$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = - \frac{N p(t)}{2 \pi a S}$ donc la pente en

$x=0$ est d'autant plus grande en valeur absolue que $p(t)$ est grand donc que t est faible puisque $p = p_0 e^{-t/\tau}$

⑦ Pour la courbe (1) (40 ans) $\frac{\partial T}{\partial x} = c/t$

Donc $- \frac{N}{2 \pi a S} p_0 e^{-40/\tau} = c/t = \frac{T_0 - T_{max}}{l}$

Tout est connu sauf S ; on calcule ③

$$S = 3 \text{ km}^2$$

II. C. Barrière géologique.

① Bilan de matière:

$$[\partial_c(x,t) - \partial_c(x+dx,t)] S dt = \frac{\partial}{\partial t} [C_L(x,t) S dx] dt$$

$$\text{soit } - \frac{\partial \partial_c}{\partial x} = + \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\text{Loi de Fick} \Rightarrow + D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = + \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial \partial_c}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(- D \frac{\partial C}{\partial x} \right) \rightarrow$$

$$\text{on, } C_t = C + C_f = C(1 + k_s)$$

$$\text{d'où } \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} (1 + k_s) = \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$D' = \frac{D}{1 + k_s} \quad \text{R: sur } k_s \ll 1 \text{ et } k_s \gg 1.$$

② $\frac{\partial C_0}{\partial t} = 0$ d'où $C_0 f''$ affine de x
car $\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} = 0$ et avec les conditions aux limites $C_0(x) = C_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$

$$\textcircled{3} \quad C(x,t) = C_0(x) - C'(x,t) \quad \textcircled{4}$$

$$C'(0,t) = 0 ; C'(l,t) = 0$$

$$0 < x < l \text{ et } t=0, C'(x,0) = + C_0(x).$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial C'}{\partial t} = D' \frac{\partial^2 C'}{\partial x^2} \text{ soit avec } C' = f \cdot g:$$

$$D' \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} \quad \text{Donc } \frac{f''}{f} \text{ et } \frac{g'}{g}$$

sont constantes et égales à une m. de.

$g' = + g \cdot \text{cte}$ d'où $g = A e^{-t/\tau}$ avec $\tau > 0$ car $g \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$: C' tend vers C_0 qd $t \rightarrow \infty$ (R.P.).

$$\textcircled{5} \quad g'/g = -\frac{1}{\tau} \text{ d'où } f''(x) + \frac{1}{\tau D'} f(x) = 0$$

$$\text{et } f(x) = \alpha \cos \frac{x}{\sqrt{D'\tau}} + \beta \sin \frac{x}{\sqrt{D'\tau}}$$

or • en $x=0$, $f(0)$ doit être nul ($C'(0)=0$)
donc $\alpha = 0$

• $x=l$, $C'=0 \Rightarrow f'(l)=0$ d'où

$$\sin \frac{e}{\sqrt{CD}} = 0, \quad \frac{e}{\sqrt{CD}} = m\pi \text{ et} \quad (5)$$

$$\tau_m = \frac{e^2}{D'\pi^2} \cdot \frac{1}{m^2}, \quad \tau_1 = \frac{e^2}{\pi^2 D'}$$

⑥ Il suffit d'injecter $c(x,t)$ dans l'équation de diffusion.

⑦ $\phi(e,t) = \int_0^e c(e,t) \cdot S = -D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) (e,t) \cdot S$

$$\phi = -DS \left(\frac{\partial c_0(x)}{\partial x} \right)_{x=e} + \frac{2DS}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \left(\frac{\pi}{e} \right) \cos(m\pi) e^{-t/\tau_m} \right)$$

$$\phi = D C_0 \frac{S}{e} \left[1 + \frac{2e}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{e} \cos(m\pi) e^{-t/\tau_m} \right]$$

$$\phi = D C_0 \frac{S}{e} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-t/\tau_m} \right]$$

⑧ $N(t) = \int_0^t \phi(e,u) du = \frac{D C_0 S}{e} t + \frac{2 D C_0 S}{e} \int_0^t (-1)^m e^{-u/\tau_m} du$

$$N(t) = \frac{D C_0 S}{e} \left[t + \sum_{m=1}^{\infty} 2(-1)^m \cdot \left(-\tau_m \right) \left[e^{-t/\tau_m} - 1 \right] \right]$$

⑨ Quand $t \rightarrow \infty$ $e^{-t/\tau_m} \rightarrow 0$

Il reste $N(t) = \frac{D C_0 S}{e} \left[t + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \tau_m \right]$
Asympt

$$N(t) = \frac{D C_0 S}{e} \left[t + 2 \underbrace{\left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m^2} \right]}_{-\pi^2/12} \frac{e^2}{D'\pi^2} \right] \quad (6)$$

$$N(t) = \frac{D C_0 S}{e} \left[t - \frac{e^2}{6D'} \right]$$

⑩ La pente donne D ($p = \frac{D C_0 S}{e}$)
et d'ordonnée à l'origine $\frac{D}{D'} \left(\frac{D C_0 S}{e} \right)$

On trouve $\begin{cases} D = 9,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\ D' = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \end{cases}$
 $K_S \approx 40$ (avec $D' = \frac{D}{1+K_S}$)

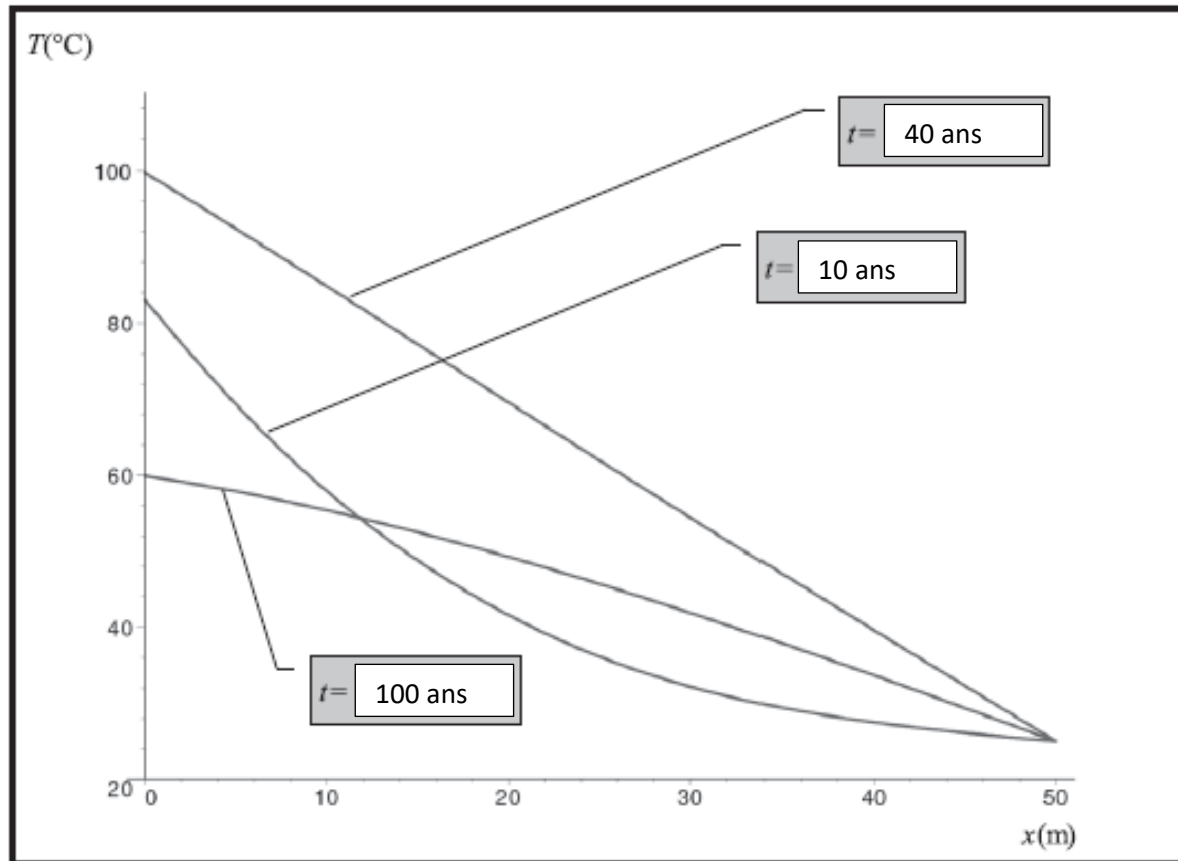
⑪ $\frac{\partial c}{\partial t} = D' \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{\tau_D} \approx \frac{D'}{L_D^2}$

AKS: $\tau_D \approx 33$ millions d'années

Sans sorption, $\frac{1}{\tau_D} \approx \frac{D}{L_D^2}$

et $\tau_D \approx 0,8$ million d'années.

Annexe 1



La température en $x = 0$ croît dans le temps jusqu'à la valeur maximale tolérée de 100°C puis décroît :

25 °C à $t = 0$

83 °C à $t = 10$ ans

100 °C à $t = 40$ ans ($T_{\max}$)

60 °C à $t = 100$ ans

Cela est logique : on dépose les colis qui délivrant une puissance thermique importante chauffent le sol en $x = 0$; cependant la diffusion thermique se met en place et la chaleur produite par les colis remonte vers la surface ($x = l$) ; il se crée un équilibre entre la production de chaleur en $x = 0$ et sa diffusion vers la surface d'où l'existence d'une valeur maximale de $T(x = 0, t)$.

R : Pour être plus précis, il faudrait comparer les temps caractéristiques de diffusion et de production d'énergie des colis ; on connaît le deuxième : 43 ans, mais pour avoir le deuxième, il faudrait avoir les valeurs numériques de c_a et ρ_a .