Sujet 1: d'après Banque PT

Ce problème s'intéresse à certains aspects du principe de fonctionnement d'un radar.
Aucune connaissance préalable de ce dispositif, ni de celui du guide d'onde, n'est requise.

Dans tout le problème Oxyz est un repère orthonormé direct.

Données :

Laplacien d'un champ vectoriel :
$\Delta\vec{A}$ (M, t) = $\Delta A_x\vec{e}_x + \Delta A_y\vec{e}_y + \Delta A_z\vec{e}_z$

- $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ F.m^{-1}$
- définition d'1 valeur efficace
  $A_{eff} = \sqrt{\langle A(t)^2 \rangle}$

- $\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{A})) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta(\vec{A})$;
- vitesse de la lumière c = 3,00 10^8 ms^{-1} ;
- perméabilité magnétique du vide $\mu_o = 4\pi\ 10^{-7}$ H m^{-1} .

Dans tout ce problème A, la fréquence des ondes étudiées vaut f = 3,00 GHz .
La relation de passage du champ électrique implique la continuité de la composante tangentielle de celui-ci au point étudié. Une forme plus générale est en fin de ce sujet.

I) Principe du radar

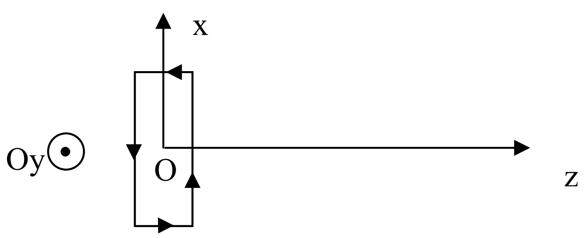
Un radar situé en O émet une onde électromagnétique en direction d'un obstacle métallique situé sur l'axe Oz appelé cible . L'onde sera considérée comme plane et l'obstacle placé orthogonalement à Oz, sera assimilé à un plan conducteur parfait de section S suffisamment grande pour que l'on puisse négliger effets de bord et diffraction. Les ondes se propagent dans l'air qui sera assimilé au vide pour ses propriétés électromagnétiques.

L'amplitude du champ électrique de l'onde incidente est Eo, celle ci est monochromatique de pulsation ω et polarisée rectilignement selon la direction Ox.
L'obstacle est situé en z = L.

1) Ecrire l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ de l'onde incidente en un point M à un instant t. Déterminer l'expression du champ magnétique associé .
2) Que vaut le champ électrique dans le métal de la cible?
3) Montrer qu'il existe nécessairement une onde réfléchie dont on donnera l'expression du champ électrique en un point M à un instant t.
4) Un radar émet une impulsion électromagnétique et reçoit un écho après une durée de 2,60 ms . A quelle distance L se trouve l'obstacle ?

II) Etude du détecteur

L'onde réfléchie est détectée par le radar. Le détecteur est modélisé par un cadre rectangulaire orienté de cotés h = 5,00 mm selon Oz et l = 10,0 cm selon Ox de vecteur normal $\vec{n} = \vec{e_y}$, de centre z = 0 . Sur ce cadre, supposé centré au point O, sont bobinés N = 1000 tours de fils en série, et reliés à un voltmètre électronique qui présente une grande impédance d'entrée.



1)

1-a) Calculer la longueur d'onde de l'onde réfléchie, et montrer que l'on peut considérer que le champ magnétique de l'onde réfléchie est uniforme sur le détecteur. En utilisant cette modélisation, déterminer l'expression littérale du flux à travers le cadre du champ magnétique de cette onde réfléchie.

1-b) En déduire l'expression de la valeur efficace de la tension instantanée détectée en fonction de Eo, c, ω, h, l et N.

2) La plus petite valeur efficace de la tension détectable est, compte tenu des parasites, Vs_{eff} = 0,01 mV.

2-a) Quelle est la plus petite valeur efficace de champ électrique réfléchi que l'on puisse détecter ?

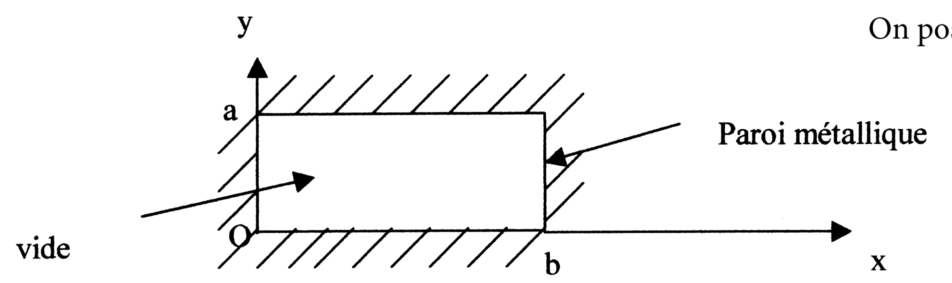
2-b) Calculer à quelle puissance moyenne rayonnée par unité de surface la valeur efficace trouvée au 2-a correspond. (la puissance sera calculée pour une OPPM seule)

III) Etude générale du guide d'onde

Pour être dirigée vers sa cible, l'onde émise est guidée au moyen d'un guide d'onde vers le foyer d'un miroir parabolique. Le guide d'onde se présente sous la forme d'un cylindre de génératrices parallèles à Oz, de section rectangulaire dans le plan Oxy. Les parois du cylindre sont formées d'un métal parfait. On cherche à propager une onde transverse électrique de pulsation ω dans l'espace **vide** situé à l'intérieur du guide, onde dont le champ électrique complexe est de la forme :

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = E(x,y)e^{i(\omega t-kz)}\vec{u_x} \ .$$

On pose S=ab



Le guide est de **hauteur a selon Oy** et de **longueur b selon Ox** (voir figure ci-dessus).

1) Rappeler les quatre équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) .
2) Montrer que, nécessairement, la fonction E(x,y) ne dépend que de y. On posera ensuite E(x,y)=E(y)
3) Etablir l'équation de propagation (dite de d'Alembert) du champ électrique dans le vide.
4) En déduire l'équation différentielle vérifiée par E(y) ; on posera : $\chi^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

La question 5 a été supprimée.

6)

6-a) Déterminer, en la justifiant soigneusement, la valeur de E(y) en y = 0 et en y = a.

6-b) Résoudre l'équation vérifiée par E(y) en supposant que $\chi^2 > 0$, avec $\chi > 0$; on introduira l'amplitude Eo supposée non nulle.

En déduire que, nécessairement, $\chi = \frac{n\pi}{a}$, avec n entier strictement positif. Pourrait-il y avoir une solution si χ^2 était négatif ou nul ?

Dans toute la suite, on suppose que $\chi = \frac{n\pi}{a}$ avec n entier strictement positif.

7) Déterminer le champ magnétique sous forme complexe puis sous forme réelle. Commenter.

8) Calculer le vecteur de Poynting, puis sa moyenne temporelle.

9) a) Déterminer la puissance moyenne traversant une section droite du guide d'onde.

b) Y a t-il équirépartition des valeurs moyennes temporelles de l'énergie électrique et magnétique?

c) Démontrer , par un bilan d'énergie sur un petit volume Sdx, utilisant les 2 questions précédentes, que la vitesse de propagation de l'énergie est égale à la vitesse de groupe.

10) Conséquences :

10-a) Que se passerait-il si k^2 était négatif ? En déduire que le guide d'onde est un filtre passe-haut dont on déterminera la pulsation de coupure ωc.

10-b) a= 10 cm . Calculer la **fréquence de coupure** f_c . Dans quel domaine est-elle située ?

10-c) La fréquence étant f = 3,00 GHz , quelles sont les valeurs possibles de l'entier positif n ?

On donne n = 1, a = b , et la puissance moyenne rayonnée par la source vaut P = 1,00 mW. En déduire la valeur de l'amplitude Eo du champ électrique.

IV Effets de dissipation.

En fait les parois du guide sont faites d'un métal réel de conductivité γ. L'objet de cette partie est d'estimer la fraction d'énergie perdue par dissipation dans les parois. Le métal est un bon conducteur ; sa conductivité vaut $\gamma = 10^6$ S m^{-1}.
Pour étudier cet effet, on considère, **pour simplifier les calculs**, que le métal emplit tout le demi-espace y > 0, le demi espace y < 0 étant vide.
On considérera qu'en tout point du métal la densité volumique de charge est nulle.

1) Ecrire les équations de Maxwell dans le métal. Montrer que l'on peut numériquement, à la fréquence considérée, négliger le "courant de déplacement" devant le courant de conduction, dans l'équation de Maxwell-Ampère.

2) En déduire l'équation de propagation du champ électrique dans le métal.

3) On cherche, cette fois, une solution de la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = Eo_t \, e^{i(\omega t - k' y)} \overrightarrow{u_x}$, Eo_t étant un réel positif.

3-a) Montrer que l'équation de dispersion est $k'^2 = - i \mu o \gamma \omega$, et la résoudre, en posant préalablement $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o \gamma \omega}}$.

3-b) Montrer que la seule solution possible est de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = Eo_t \, e^{-\frac{y}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)} \overrightarrow{u_x} .$$

δ est nommée "épaisseur de peau" ; commenter physiquement cette dénomination. Calculer la valeur numérique de δ, avec f = 3,00 GHz . Commenter la valeur obtenue.

4) En déduire l'expression de la densité volumique complexe, puis réelle, de courant à tout instant; calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une portion de métal

de section S dans le plan xOz et d'extension infinie selon Oy (y compris entre O et $+\infty$),en fonction de Eot, notamment.

5) L'épaisseur de peau δ étant petite, on peut ici modéliser la distribution de courant par une distribution surfacique $\vec{j}_s$.

5-a) Justifier que $\vec{j}_s = \int_0^\infty \vec{j}dy$; déterminer $\underline{\vec{j}_s}$, densité surfacique complexe, puis $\vec{j}_s$.

5–b) En déduire le lien entre la puissance moyenne dissipée à la question 4, S, δ,γ et la valeur efficace de $\vec{j}_s$.

6) Pour estimer l'effet des pertes dans le cas d'un guide d'onde rectangulaire formé d'un métal de conductivité γ élevée on conserve la solution trouvée en III) pour un mode n quelconque en remplaçant l'amplitude Eo introduite au III.6.b par une fonction de z , notée Eo(z) et a priori inconnue.
6-a) En assimilant le métal à un métal parfait, déterminer la densité surfacique de courant sur les parois du guide situées en y = 0 et en y = a.
6-b) Montrer que la puissance moyenne dissipée sur une tranche dz de guide en ne tenant compte que des pertes dues aux parois précédentes est donnée par :

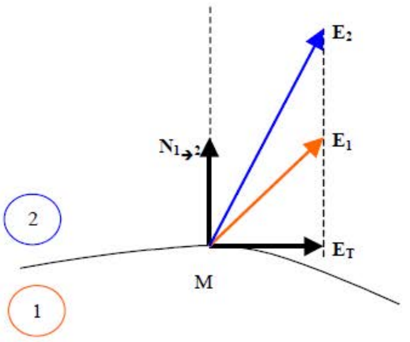
$$dP = \frac{b\, Eo^2_{(z)}\, \chi^2 \delta}{2\, \mu o\, \omega} dz$$

. En déduire une équation différentielle vérifiée par $Eo^2(z)$.

6-c) Déterminer Eo(z) en fonction de z, Eo (valeur en z=0) et une longueur caractéristique ℓo ; comment a-t-on intérêt à choisir le mode, i.e. la valeur de l'entier n ?

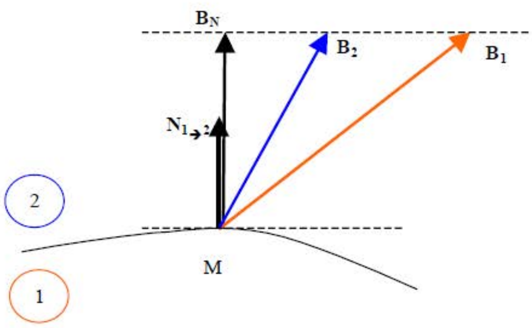
6-d) Dans le cas du mode fondamental n = 1, calculer la valeur numérique de ℓo.

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{N}_{1\to 2}$$



Champ E :
- Continuité de la composante tangentielle
- Discontinuité éventuelle de la composante normale

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{N}_{1\to 2}$$



Champ B :
- Continuité de la composante normale
- Discontinuité éventuelle de la composante tangentielle