

Ce Ds comporte deux parties totalement indépendantes, que vous rédigerez svp sur des copies différentes.

PREMIERE PARTIE : MEMBRANES VIBRANTES

Données :

a) Le problème fait appel à l'équation différentielle dite de « Bessel » :

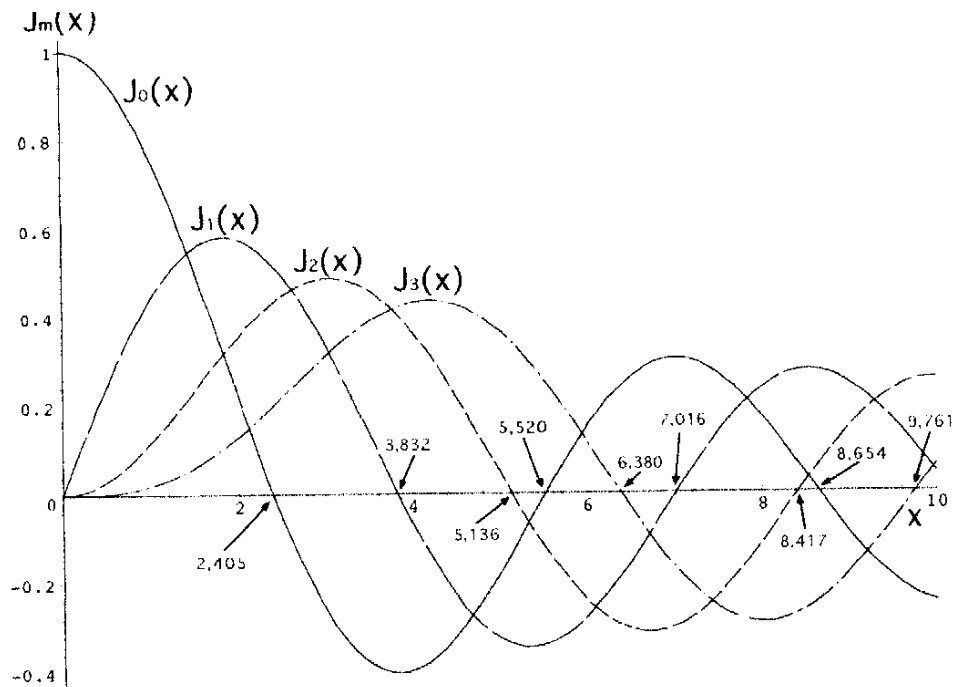
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \text{ avec } m \text{ entier}$$

Solutions de cette équation : $y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x)$, où C_1 et C_2 sont des constantes, J_m la fonction de Bessel de première espèce d'indice entier m , Y_m la fonction de Bessel de seconde espèce d'indice entier m .

Les formes asymptotiques de ces fonctions de Bessel sont, pour $x \ll 1$:

$$J_m(x) \rightarrow \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m ; Y_0(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + 0,5772\dots\right), Y_m(x) \rightarrow -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m \text{ pour } m = 1, 2, 3, \dots$$

La figure ci-dessous donne les graphes des fonctions de Bessel J_0, J_1, J_2, J_3 .



b) Chaque fonction de Bessel possède des zéros, que l'on numérote : 1, 2, 3... sachant que le zéro $x = 0$ est exclu. Ainsi, le premier zéro numéroté de J_1 est pour $x = 3,832$.

c) On donne l'expression du laplacien scalaire dans les systèmes de coordonnées suivants :

Coordonnées cartésiennes (x, y, z) : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Coordonnées cylindriques (r, θ, z) (Cf. figure I.2) : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

I.0. Corde vibrante

On s'intéresse dans cette partie aux vibrations (dans l'hypothèse des *petits mouvements verticaux* suivant l'axe vertical noté z) d'une corde de masse linéique μ , de tension T_0 constante. Celle-ci est sans raideur ; son poids est négligé ainsi que tout phénomène dissipatif.

On note $z(x, t)$ la déformation de cette corde et $\alpha(x, t)$ l'angle que fait la corde avec l'axe des x , avec lequel elle est confondue lorsqu'elle est au repos.

I.0.1. En appliquant la relation fondamentale à un brin de corde de longueur dx , montrer **soigneusement**, que la déformation obéit à une équation de D'ALEMBERT dans laquelle apparait une célérité que l'on écrira en fonction de T_0 et μ . On vérifiera l'homogénéité de l'expression obtenue.

I.0.2. La corde est fixée à ses extrémités et on note L sa longueur.

a - Montrer qu'un mode propre quelconque de la corde peut s'écrire :

$$\left(a_n \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad \text{Représenter graphiquement l'un quelconque de ces modes en précisant bien la valeur de } n \text{ choisie.}$$

On indique qu'une excitation de cette corde fixée est une superposition des modes propres précédents

b - Indiquer qualitativement comment on peut, en pratique, pour cette corde faire varier les a_n et les b_n ?

I.A. membrane rectangulaire

On s'intéresse maintenant (I.B. et I.C.) aux vibrations de membranes élastiques tendues, sans raideur.

Définition : On définit la tension d'une membrane par analogie avec celle d'une corde. Si on pratique une fente rectiligne de longueur dl dans la membrane tendue, il faut exercer sur les deux bords pour les maintenir en place deux forces égales et opposées, contenues dans le plan tangent à la membrane au point d'application, perpendiculaires à la direction de la fente, et de valeur : $dF = Tdl$.

T est donc une force linéique et s'exprime en $N.m^{-1}$.

On montre que T est, pour une membrane donnée, une constante indépendante du temps, du point envisagé et de l'orientation de la fente, sous réserve des hypothèses de non raideur et de petits mouvements.

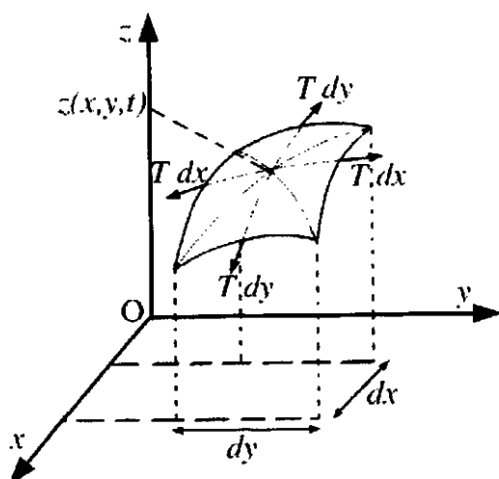


figure I.1

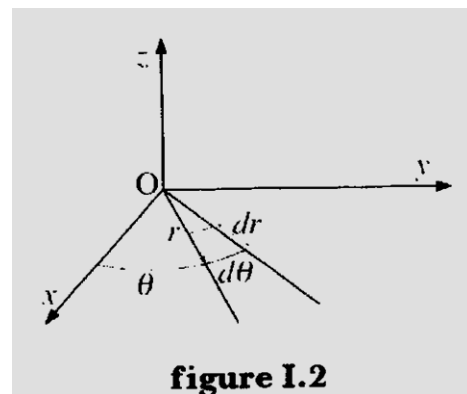


figure I.2

I.A.1. Soit une membrane rectangulaire tendue de dimensions L_x et L_y de masse surfacique constante, notée σ . Cette membrane, au repos est située dans le plan xOy (figure I.1). La membrane est soumise à des conditions aux limites que l'on précisera ultérieurement. On étudie les mouvements de la membrane, chaque point ne pouvant se déplacer que selon la direction Oz (vibrations transversales).

Donner la condition qui permet de négliger le poids de la membrane dans l'étude de son mouvement.

I.A.2. On considère un élément infinitésimal de la membrane, de dimensions au repos dx et dy , écarté de sa position d'équilibre d'une quantité $z(x, y, t)$ (figure I.1). Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément.

I.A.3. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique et montrer que l'on peut en déduire l'équation d'onde régissant la déformation de la membrane : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$

On précisera la valeur de la célérité c de l'onde en fonction des données et on vérifiera l'homogénéité de l'expression obtenue.

I.A.4. Donner la justification d'un choix de solutions à variables séparées : $z(x,y,t) = X(x)Y(y)\Psi(t)$

Montrer que ce choix impose : $\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dt^2} = K$ où K est une constante que l'on posera, après justification, égale à $-\omega^2$, où ω est une grandeur définie positive.

I.A.5. Donner la solution générale à laquelle satisfait $\Psi(t)$.

I.A.6. Montrer que les fonctions X et Y satisfont à des équations différentielles dont on donnera les solutions générales.

I.A.7. La membrane est fixée rigidement le long de ses quatre bords : $(x = 0)$, $(x = L_x)$ $(y = 0)$, $(y = L_y)$.

Donner la solution $z_{m,n}(x, y, t)$ en fonction de : ω , x , y , L_x , L_y , m , n , t et deux constantes M et N , où m et n sont des entiers, le premier relatif à la solution de X et le second à la solution de Y .

I.A.8. Donner les expressions des fréquences $f_{m,n}$ auxquelles la membrane peut vibrer. Comparer au résultat obtenu lors de la même étude pour la corde.

I.A.9. Faire successivement les représentations sur une membrane rectangulaire (L_x représentée par 4 cm, L_y par 2 cm) des lignes nodales pour les six cas suivants :

$(m = 1, n = 1)$; $(m = 2, n = 1)$; $(m = 1, n = 2)$; $(m = 2, n = 2)$; $(m = 3, n = 1)$; $(m = 3, n = 2)$.

I.B. Membrane circulaire

I.B.1. L'étude de l'élément infinitésimal de la membrane de géométrie circulaire se rapporte à des coordonnées polaires dans le plan xOy (figure I.2). Donner, sans calcul, en transposant les résultats des questions I.A.2. et 3. et en utilisant les formules fournies, l'équation différentielle régissant l'évolution de la déformation $z(r, \theta, t)$ de la membrane.

I.B.2. On cherche une solution à variables séparées sous la forme : $z(r, \theta, t) = R(r) F(\theta) \Psi(t)$

Montrer que ce choix, que l'on justifiera, conduit à l'équation (1) $\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\theta^2} = K'$, avec K' constante que l'on posera égale à $-m^2$ et à une autre équation différentielle (2), portant sur R , que l'on exprimera.

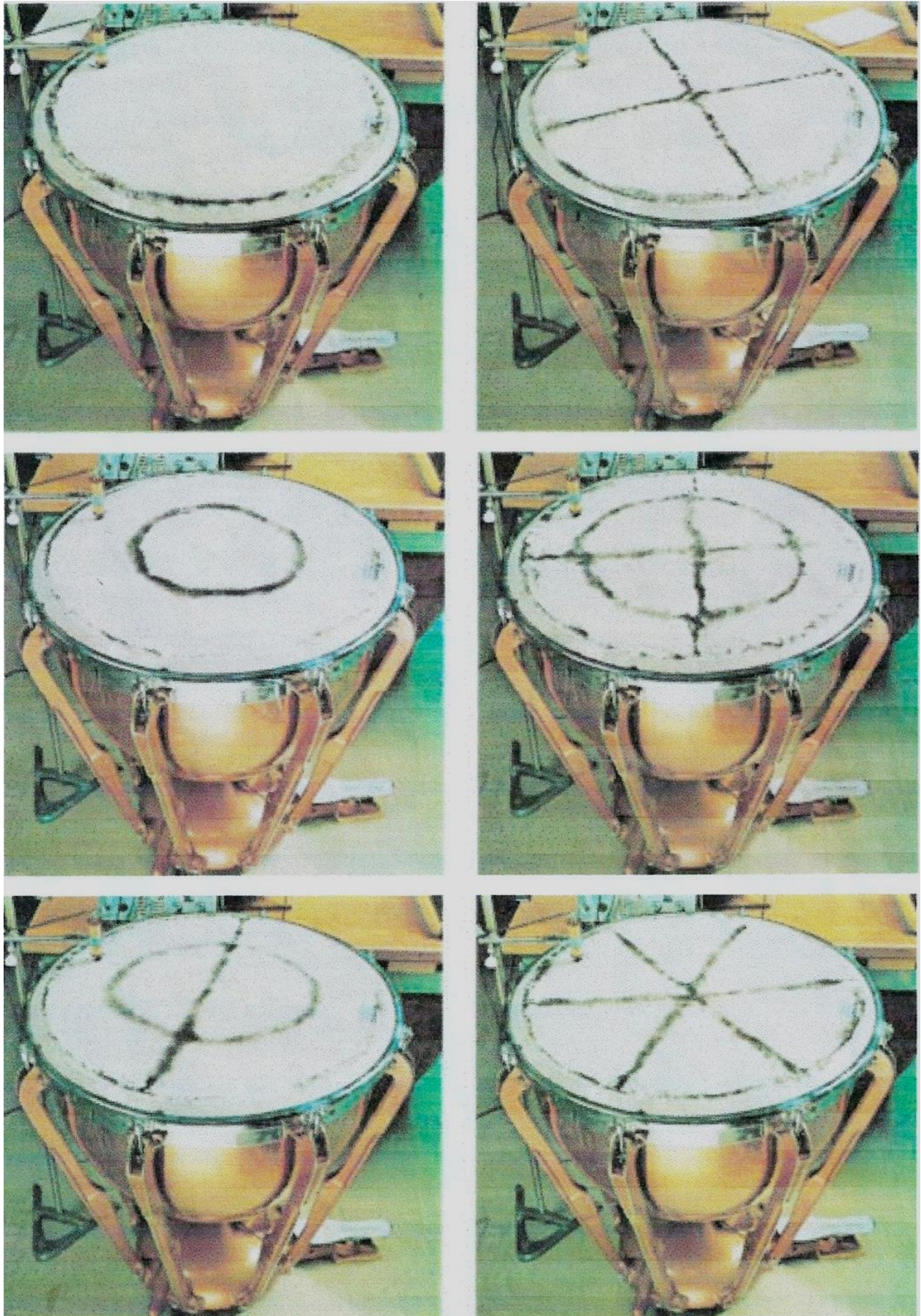
I.B.3. Résoudre (1) ; montrer que m est nécessairement entier.

I.B.4. Montrer par le changement de variable $r' = \frac{r\omega}{c}$ que l'équation différentielle (2) est une équation différentielle de Bessel. En donner les solutions physiquement acceptables.

I.B.5. On considère un tambour (photos ci-dessous) mis en excitation par un dispositif dont une partie est visible en haut et à gauche de chaque photo (vibreux).

Une poudre noire est saupoudrée uniformément sur la surface du tambour avant la mise en marche du dispositif vibratoire.

- Commenter les photos.
- On repère par l'indice n le $n^{\text{ième}}$ zéro de la solution de R. Indiquer quels sont les couples d'entiers (m, n) qui correspondent aux photos (le $n^{\text{ième}}$ zéro étant situé au bord du tambour).



Photos extraites du magazine Pour la Science

Vélocimétrie laser Doppler

Alors même que la simulation numérique en mécanique des fluides est de plus en plus performante, le recours à l'expérimentation reste nécessaire, ne serait-ce que pour valider ces simulations.

À cette fin, la détermination de cartes de vitesses au sein d'un écoulement est un outil précieux. Ce sujet s'intéresse à une méthode peu invasive : la vélocimétrie laser Doppler. Le fluide dont on souhaite étudier l'écoulement est ensemencé à l'aide de particules le plus souvent solides, qui se déplacent au sein du fluide, idéalement à la même vitesse et sans le perturber. Lors du passage de ces particules à travers un ou plusieurs faisceaux laser, la lumière est diffusée et son analyse permet la détermination de la vitesse de la particule, et donc localement du fluide qui la porte.

On propose en figure 1 une vue d'ensemble du dispositif de mesure à deux faisceaux, sur laquelle on ne représente pas le dispositif destiné à analyser la lumière diffusée par les particules ensemencées dans le fluide.

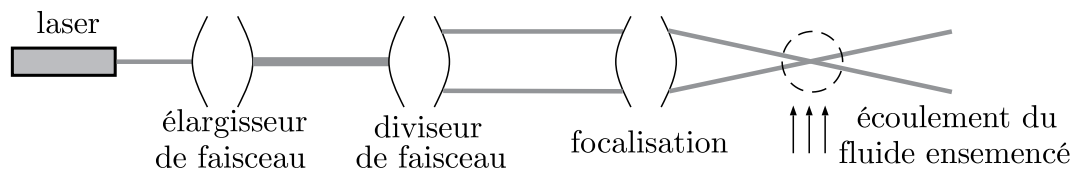


FIGURE 1 – Vue d'ensemble du dispositif.

Ce sujet aborde dans une première partie le principe de la vélocimétrie laser Doppler, puis étudie deux domaines d'application : l'écoulement d'un liquide dans une canalisation puis l'étude d'ondes sonores guidées. Ces parties sont assez largement indépendantes.

La partie mécanique des fluides n'est pas abordée.

Les applications numériques seront données avec 1 seul chiffre significatif. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\hat{u}$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$. Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont notés $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ et ceux de la base cylindrique d'axe Ox $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_x)$. En fin de sujet sont regroupées des constantes de la physique utiles, ainsi qu'un formulaire d'analyse vectorielle.

I Principe de la vélocimétrie laser

Dans toute cette partie, le fluide en écoulement est supposé transparent. On note c_0 la vitesse de la lumière dans le vide et dans le fluide, assimilé au vide du point de vue des ondes électromagnétiques.

I.A Montage à 1 faisceau

L'effet Doppler décrit le décalage en fréquence d'une onde, observé entre les mesures à l'émission et à la réception, lorsque la distance entre l'émetteur et le récepteur varie au cours du temps. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen, on fixe un laser et un récepteur lumineux. Le laser à argon utilisé émet une onde plane progressive monochromatique (OPPM) électromagnétique de fréquence f_e et longueur d'onde $\lambda_e = 5,2 \times 10^2$ nm, dirigée selon $\hat{u}_e$ et se propageant à c_0 .

Une particule solide P , supposée ponctuelle et possédant une vitesse $\vec{V}$ dans $\mathcal{R}$, constitue un observateur mobile par rapport à l'émetteur laser fixe. Par effet Doppler, elle perçoit donc une fréquence f_p différente de la fréquence f_e émise.

La figure 2 décrit une période spatiale λ_e de l'OPPM délimitée par deux fronts d'onde Π_1 et Π_2 à l'instant t , et par deux fronts d'ondes Π'_1 et Π'_2 à l'instant $t' = t + \Delta t$ avec $\Delta t = 1/f_p$. P appartient à Π_1 à l'instant t puis à Π'_2 à l'instant t' .

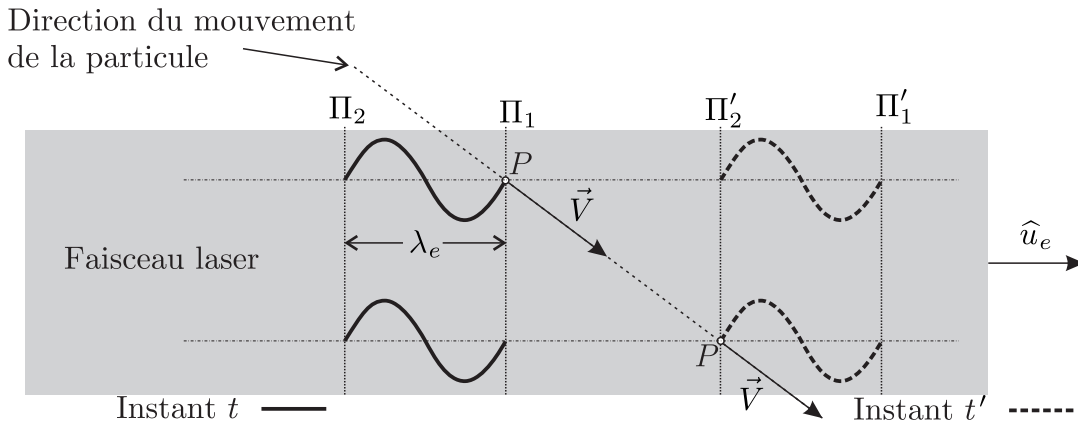


FIGURE 2 – Effet Doppler.

- – 1. En faisant apparaître $\vec{V} \cdot \hat{u}_e$, exprimer la distance parcourue par l'onde pendant Δt en fonction de la distance parcourue par la particule et de λ_e . En déduire la relation

$$f_p = f_e \left(1 - \frac{\hat{u}_e \cdot \vec{V}}{c_0} \right)$$

La particule mobile diffuse à son tour de la lumière vers un photorécepteur fixe, selon la direction de $\hat{u}_d$. Par effet Doppler, ce dernier perçoit une fréquence f_d différente de la fréquence f_p émise.

- – 2. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la particule et en translation par rapport à $\mathcal{R}$, la particule émettrice de lumière est fixe et le récepteur mobile. En le justifiant, adapter le résultat de la question précédente afin de relier f_d et f_p .
- – 3. Pour une vitesse $\|\vec{V}\| \ll c_0$ de l'ordre de 10 cm.s^{-1} , en déduire que :

$$f_d \simeq f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_e) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \quad (1)$$

Pour un laser à argon, que penser de l'écart relatif en fréquence, entre OPPM émise et reçue au niveau du photorécepteur ? On s'appuiera sur une analyse numérique.

I.B Montage à 2 faisceaux

Afin d'améliorer la précision des vitesses mesurées, ainsi que la localisation de celles-ci dans le fluide, on a recours à un dispositif à deux faisceaux laser.

I.B.1 Élargisseur et diviseur de faisceau

L'élargisseur de faisceau, présenté en figure 3-a, transforme un faisceau cylindrique laser de largeur d_0 , en un autre de largeur $d'_0 > d_0$. Le diviseur de faisceau, présenté en figure 3-b, le sépare ensuite en deux faisceaux parallèles de largeur identiques d''_0 qui ne se recouvrent pas et dont les axes sont distants de D .

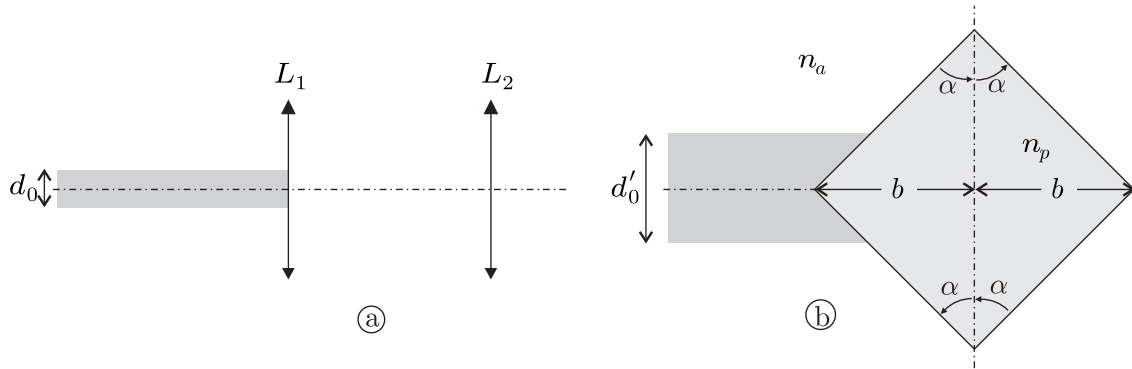


FIGURE 3 – Élargisseur (a) et diviseur de faisceau (b)

La partie diviseur de faisceau n'est pas étudiée: Q5, Q6 supprimées.

- – 4. Reproduire le schéma de l'élargisseur de faisceau de la figure 3–a et positionner les foyers des deux lentilles permettant d'obtenir un faisceau de largeur d'_0 supérieur à d_0 . Exprimer alors d'_0 en fonction de d_0 et des distances focales f'_1 et f'_2 de L_1 et L_2 .
Exprimer l'encombrement de ce dispositif, défini comme sa longueur sur l'axe optique, en fonction de f'_1 , d_0 et d'_0 .
Proposer un dispositif permettant de réduire cet encombrement sans changer d'_0 . On exprimera le nouvel encombrement et on justifiera qu'il est inférieur à celui du premier dispositif.

Dans ce qui suit on supposera que les faisceaux sont correctement séparés comme sur la figure 4.

I.B.2 Étude de l'onde diffusée

Une lentille convergente focalise les deux faisceaux laser précédents vers une zone de recouvrement où circule le fluide en écoulement. Ces deux faisceaux, notés F_1 et F_2 , sont assimilés à des OPPM d'extension spatiale finie de largeur d , de même intensité et de même fréquence f_e .

Sur la figure 4, on note $\vec{k}_{e1} = k_e \hat{u}_{e1}$ et $\vec{k}_{e2} = k_e \hat{u}_{e2}$ les vecteurs d'onde respectivement associés à F_1 et F_2 ainsi que θ l'angle entre ces deux vecteurs. La lumière diffusée de la particule P vers le récepteur O est portée par le vecteur d'onde commun $\vec{k}_d = k_d \hat{u}_d$.

On s'intéresse alors au passage d'une particule solide d'ensemencement P , de vitesse $\vec{V} = V_x \hat{u}_x + V_y \hat{u}_y + V_z \hat{u}_z$ dans la zone de recouvrement des faisceaux.

Au niveau du récepteur, les champs électriques issus de F_1 et F_2 et diffusés par P s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_{d1} = \underline{E}_{d1} \hat{u}_x = E_0 e^{2i\pi f_{d1} t} \hat{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_{d2} = \underline{E}_{d2} \hat{u}_x = E_0 e^{2i\pi f_{d2} t} \hat{u}_x$$

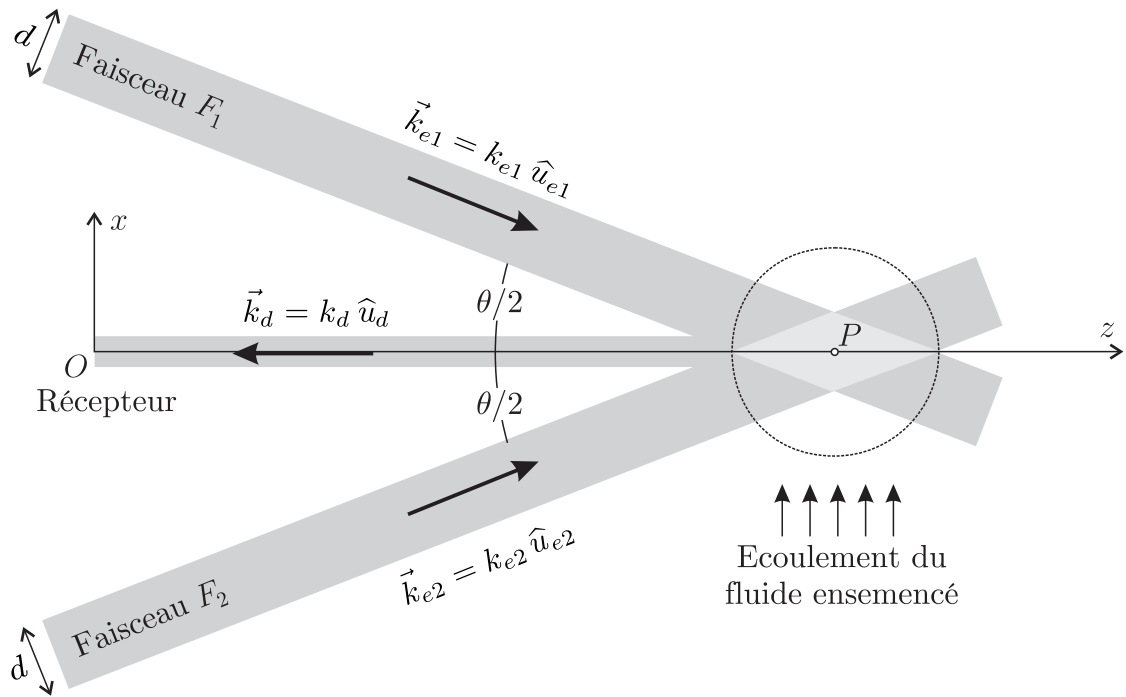


FIGURE 4 – Zone de recouvrement des lasers. Diffusion de lumière par une particule.

- – 7. En utilisant le résultat (1), exprimer $f_{d1} - f_{d2}$ en fonction de λ_e , θ et de l'une des composantes de la vitesse $\vec{V}$.

Le photorécepteur est sensible à $I(t) = K |\underline{E}_{d1} + \underline{E}_{d2}|^2$ où K est une constante positive caractéristique du récepteur.

- – 8. Montrer que le signal reçu s'écrit sous la forme $I(t) = 2\Lambda [1 + \cos(\beta t)]$. On précisera Λ et β en fonction des données. Exprimer la fréquence f_c de clignotement de cette lumière diffusée en fonction de λ_e , θ et l'une des composantes de $\vec{V}$.
- – 9. La valeur de la composante de la vitesse particulière intervenant dans le résultat de la question précédente est de 10 cm.s^{-1} ; calculer numériquement la valeur de f_c obtenue avec deux faisceaux issus d'un laser à argon faisant un angle de $3,6^\circ$ entre eux. Justifier l'utilisation de deux faisceaux lasers en termes de précision de la mesure et de localisation de la particule.
- – 10. Le photorécepteur utilisé possède un temps de réponse de $\tau = 4,4 \times 10^{-9} \text{ s}$ et l'angle θ entre les faisceaux vaut $3,6^\circ$. Pour le laser à argon, déterminer littéralement puis numériquement la plage $[-V_{\max}, +V_{\max}]$ de vitesses détectables par le système.
- – 11. Pourquoi ne peut-on mesurer qu'une seule composante de $\vec{V}$ avec ce dispositif? Proposer une solution permettant d'accéder simultanément aux trois composantes du vecteur vitesse de la particule.
- – 12. Pourquoi ne peut-on pas faire la différence entre une valeur positive et une valeur négative de la composante mesurée?

(pour rappel, la partie II n'est pas abordée)

III Application à l'étude d'ondes acoustiques

III.A Onde acoustique guidée

Un émetteur produit dans l'air une onde acoustique de fréquence $f = 40 \text{ kHz}$ et de longueur d'onde λ . L'air, de viscosité négligeable, possède une masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$, un coefficient de compressibilité isentropique χ_S et un coefficient de Laplace $\gamma = 1,4$. Au repos, à 20°C , la pression de l'air vaut $P_0 = 1 \text{ bar}$ et sa masse volumique $\mu_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$.

- – 17. Qu'est-ce que l'approximation acoustique ? Donner sans démonstration un système de trois équations locales linéarisées utiles pour un problème unidimensionnel orienté par l'axe Ox . En déduire l'équation d'onde vérifiée par la surpression $p_1(x, t)$.
- – 18. En assimilant l'air à un gaz parfait, montrer que la célérité c du son dépend de la masse molaire du milieu. Calculer numériquement c dans l'air à 20°C .
- – 19. Pour une OPPM, établir l'expression de l'impédance acoustique Z_a . Exprimer l'intensité en décibel I_{dB} en fonction de v_m l'amplitude de la vitesse acoustique, $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ l'intensité seuil d'audibilité d'un son, et Z_A . Calculer numériquement v_m si $I_{dB} = 120 \text{ dB}$ dans l'air à 20°C . Le velocimètre à deux lasers étudié précédemment permettrait-il d'accéder à de telles valeurs de v_m ?

On généralise l'équation d'onde vérifiée par la surpression $p_1(M, t)$ à une géométrie quelconque :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(M, t) = c^2 \Delta p_1(M, t)$$

Deux plaques rigides de grandes dimensions sont fixées en $z = 0$ et $z = a$ et représentées en figure 6. Elles imposent comme conditions à la surpression :

$$\left. \frac{\partial p_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial p_1}{\partial z} \right|_{z=a} = 0$$



FIGURE 6 – Modèle plan de guide d'onde acoustique.

- – 20. Justifier que l'on cherche une solution du problème sous la forme $p_1(M, t) = p(z) \cos(\omega t - kx + \phi)$ puis caractériser physiquement une telle onde. On prendra $k > 0$ et $\omega > 0$.
- – 21. Déterminer et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$. On montrera que les solutions s'écrivent :

$$p_n(z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \quad n \in \mathbb{N}$$

Caractériser le **cas** $n = 0$.

- – 22. Trouver la relation de dispersion pour chaque mode propre et montrer l'existence d'une pulsation de coupure $\omega_{c,n}$ à partir de laquelle le mode propre $n > 0$ peut se propager. En déduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe, associées à chaque mode propre, en fonction de c , ω et $\omega_{c,n}$. Commenter ces expressions.
- – 23. À quelle condition sur a et la longueur d'onde λ de l'onde libre, le mode fondamental $n = 0$ se propage-t-il seul entre les plaques ? Faire l'application numérique correspondant à cette condition.

Étudions désormais la propagation d'une onde acoustique dans une conduite circulaire de rayon a . On peut utiliser les résultats de la question 22, à condition de considérer une pulsation de coupure $\omega_{c,nm} = \frac{\mu_{nm}c}{a}$. Le paramètre μ_{nm} désigne la valeur de la variable x pour laquelle la fonction de Bessel d'ordre n , $J_n(x)$, admet son $m^{\text{ième}}$ maximum.

ordre n	μ_{n1}	μ_{n2}	μ_{n3}	μ_{n4}
0	0	3,8	7,0	10,2
1	1,8	5,3	8,5	
2	3,1	6,7	10,0	
3	4,2	8,0		
4	5,3	9,3		
5	6,4			
6	7,5			

- – 24. Quels modes propres, caractérisés par un couple d'entiers (n,m) , peuvent se propager dans un tuyau de diamètre $2a = 11$ mm ?
- – 25. Ce tuyau est alimenté par des salves d'une durée de 4 périodes. Les différents modes propres se propageant sous forme de paquets d'ondes, quelle longueur de tuyau faut-il choisir pour pouvoir les résoudre en sortie ?

III.B Production de l'onde acoustique

Pour émettre des ondes acoustiques par salves, l'émetteur doit être alimenté par un générateur de trains de sinusoïdes à 40 kHz.

Considérons tout d'abord le montage de la figure 7 où l'ALI, supposé idéal, est alimenté par des tensions ± 15 V et dont les tensions de saturation sont alors également $\pm V_{sat} = \pm 15$ V.

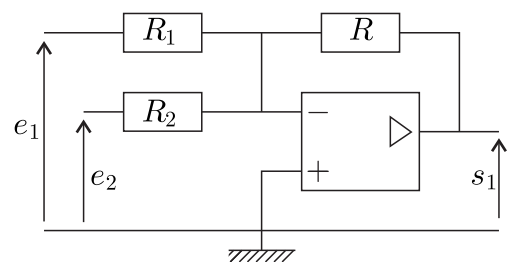


FIGURE 7 – Montage à ALI idéal.

- – 26. Exprimer la tension s_1 en fonction des données du montage. Représenter un montage permettant d'obtenir une tension $s = -s_1$.

On adapte ce montage de la façon suivante :

- $R = R_1 = R_2 = 47 \text{ k}\Omega$;
- $e_1(t)$: tension sinusoïdale de fréquence $f_1 = 40 \text{ kHz}$ et d'amplitude crête à crête 8 V ;
- $e_2(t)$: tension en créneau de fréquence $f_2 = 5,0 \text{ kHz}$ et d'amplitude crête à crête 12 V ;

- – 27. Tracer l'allure de la courbe $s(t)$ en fonction du temps, sur une durée de 4×10^{-4} s. On précisera les coordonnées des points remarquables.

La relation $s = -s_1$ est vérifiée

On modifie l'alimentation de l'ALI, initialement de $\pm 15\text{ V}$, par deux tensions de 0 V et 15 V .

On suppose que le fonctionnement de l'ALI n'est pas altéré par cette alimentation et on admet que les portions négatives du signal précédent sont écrêtées à 0 V .

- – 29. La fiche technique de l'amplificateur opérationnel LM741 utilisé indique une vitesse limite de balayage de $0,5\text{ V}\cdot\mu\text{s}^{-1}$. Pourquoi le signal $s(t)$ sera-t-il déformé ? Comment minimiser les effets de ce défaut sans changer de composant ?

III.C Ensemencement

Pour mesurer la vitesse de l'air, due à la présence d'une onde acoustique, on y insémine des particules solides en suspension qui diffusent la lumière. La vitesse mesurée par effet Doppler n'est donc pas directement la vitesse v_f du fluide étudié, mais la vitesse v_p des particules d'ensemencement utilisées comme traceurs.

Au cours de son mouvement, une particule sphérique de masse volumique $\mu_p = 1,0 \times 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ n'est soumise qu'à la force de frottement visqueux $-3\pi d_p \eta_f (v_p - v_f)$ où $d_p = 1,0\text{ }\mu\text{m}$ désigne le diamètre de la particule et $\eta_f = 1,8 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ la viscosité dynamique de l'air à 20°C .

- – 30. Justifier l'expression de cette force par le calcul d'un nombre adimensionné.
- – 31. En régime harmonique de fréquence f , exprimer le rapport des vitesses complexes v_p/v_f en fonction de f et d'une fréquence f_0 à définir en fonction des données. Calculer $\overline{f_0}$ numériquement.
- – 32. Dans quel intervalle fréquentiel faut-il travailler ? À la fréquence f de l'émetteur, quelle erreur relative est commise sur la mesure de l'amplitude de v_f ? Quelle fréquence maximale faut-il choisir pour commettre une erreur relative inférieure à 1% ? Conclure sur l'intérêt de ces particules pour étudier des infrasons, des sons audibles ou des ultrasons.

Données numériques

- vitesse de la lumière dans le vide : $c_0 = 3,0 \times 10^8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8,3\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Opérateurs vectoriels

Expressions des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques (r, θ, x) pour un champ scalaire $U(r, \theta, x)$ et un champ vectoriel $\vec{A} = A_r(r, \theta, x)\hat{u}_r + A_\theta(r, \theta, x)\hat{u}_\theta + A_x(r, \theta, x)\hat{u}_x$:

$$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial x}\hat{u}_x \quad \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\text{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_x}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial x}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial r}\right)\hat{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{u}_x$$

$$\Delta\vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\hat{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right]\hat{u}_\theta + [\Delta A_x]\hat{u}_x$$

FIN DE L'ÉPREUVE